Vrije Universiteit Brussel

Brugcursus

Fysica

voor het hoger onderwijs

september 2013
Studiebegeleidingscentrum

Brugcursus FYSICA

Studiebegeleidingscentrum

Vrije Universiteit Brussel

Inhoudsopgave

Lijst van figuren

Lijst van tabellen

Voorwoord

Met deze brugcursus hebben we als bedoeling om je startklaar te maken voor het volgen van 1ste jaar bachelor opleidingsonderdelen i.v.m. fysica aan hogeschool of universiteit, in opleidingen zo divers als biologie, chemie, geografie, computerwetenschapppen, bio-ingenieurswetenschappen, industriële wetenschappen, ingenieurswetenschappen, architectuur, biomedische wetenschappen, farmaceutische wetenschappen, lichamelijke opvoeding en kinesitherapie.

Heel in het bijzonder is deze brugcursus gericht naar startende studenten die in het middelbaar onderwijs niet een programma met 1 of 2 lestijden fysica per week hebben gevolgd, of voor wie het einde van het middelbaar onderwijs reeds enkele jaren achter de rug is.

De leerstof in deze brugcursus omvat de noodzakelijke basisvaardigheden i.v.m. getalwaarden (eenheden, notaties, elementaire verbanden), en de vectoriële en analytische beschrijving van beweging leidend tot het cruciale kinematisch concept versnelling. Deze leerstof is van fundamenteel belang voor alle domeinen van de fysica, biomechanica, biomedische fysica en ingenieursvaardigheden, en komt in de bacheloropleiding reeds vroeg aan bod.

De auteurs van deze brugcursus weten uit ervaring dat fysica door vele leerlingen en studenten beleefd wordt als een noodzakelijk kwaad. De auteurs koesteren de stille hoop dat deze brugcursus kan bijdragen tot het ontwikkelen van meer zelfvertrouwen bij studenten.

Veel leerplezier en een goede start!

Studiebegeleidingscentrum

september 2013

Deel I. Basisvaardigheden

1 Belangrijke topics

1.1 Getalwaarden en eenheden van basisgrootheden in de Fysica

Fysica houdt zich heel erg bezig met de verbanden tussen de gemeten getalwaarden van grootheden uit de natuur. Gemeten getalwaarden (voor bijvoorbeeld lengte, tijd...) worden steeds uitgedrukt in termen van **standaarden** voor deze grootheden. Je kan je dit als volgt voorstellen. Veronderstel dat je de lengte van een klaslokaal bepaalt door lucifers achter elkaar te leggen op de vloer langsheen de lange wand. Je zou dan de lengte primitief kunnen uitdrukken als "x aantal lucifers". Je gebruikt dan een lucifer als meeteenheid. In de praktijk moeten we een gestandardiseerde meeteenheid hebben, want niet alle lucifers uit alle luciferdoosjes zijn even lang.

In de Fysica maken we meestal gebruik van het "metrisch stelsel", meer bepaald het **S.I.** *(Système International d'Unitès)* of **M.K.S.** stelsel, zo genoemd omdat het gebaseerd is op het gebruik van de **meter**, de **kilogram** en de **seconde** als standaarden voor lengte, massa en tijd. Op de website van het Bureau International des Poids et Mesures (http://www.bipm.org/) kan je meer lezen over de precieze definities van deze standaarden.

De meter staat in verband met de nog veel gebruikte basis lengte-eenheid uit het "Engelse" systeem - de *inch* (Ned: *duim*)- door middel van de relaties:

$1\,cm = 10^{-2}\,m$ en $1\,in = 2,54\,cm$

We hebben ook:

$1\,m = 3,281\,ft$ (Ned: *voet*) en $1\,km = 0,6214\,mi$ (Ned: *mijl*)

Je kent ook de verbanden tussen de gebruikelijke eenheden voor **tijd**:

$1\,min = 60\,s$ en $1\,u = 60\,min$ en $1\,dag = 24\,u$

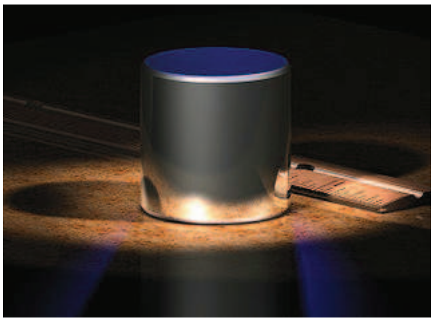
en we hebben ook de relatie:

$1\,jaar = 365,24\,dagen$

De S.I.-eenheid voor **massa** is de kilogram. In de Fysica wordt een welbepaalde betekenis toegekend aan het begrip massa. Voorlopig volstaat het te weten dat $1\,kg$ overeen komt met een welbepaald standaardobject dat $1\,kg$ weegt, zie Fig. 1

Het begrip **gewicht** heeft in de Fysica **niet (!)** dezelfde betekenis als **massa**.

Fig. 1: *computer-gegenereerde afbeelding van de internationale standaard kilogram, een cilinder bestaande uit een platina–iridium legering met 39,17 mm diameter en hoogte, met afgeronde randen om verwering te minimaliseren. De standaard kilogram bevindt zich in het Bureau International des Poids et Mesures te Sèvres nabij Genève.*



Tab. 1: *basisgrootheden en eenheden in het S.I. eenhedenstelsel*

S.I. basisgrootheid			**S.I. eenheid**	
benaming	*dimensie*	*symbool*	*benaming*	*symbool*
lengte	L	l, x, r enz.	meter	m
massa	M	m	kilogram	kg
tijdstip, tijdsduur	T	t	seconde	s
electrische stroomsterkte	I	I, i	ampere	A
hoeveelheid stof	N	n	mol	mol
thermodynamische temperatuur	Θ	T	kelvin	K
lichtsterkte	J	I_v	candela	cd
http://www.bipm.org/en/si/si_brochure/chapter2/2-1/				

In het S.I.-eenhedenstelsel wordt met 7 basisgrootheden gewerkt, alle andere grootheden zijn afgeleide grootheden hiervan, zie Tabel 1

In deze brugcursus zijn de eerste drie basisgrootheden van belang. Deze hebben te maken met de mechanische verschijnselen. De andere vier staan in verband met de verschijnselen: warmte, licht en electromagnetisme. Het volstaat hier op te merken dat zeer veel (de meeste eigenlijk!) fysische grootheden zoals kracht, energie, magnetisch veld enz. geen basisgrootheden zijn, maar kunnen afgeleid worden van de 7 basisgrootheden in Tabel 1.

1.2 Het Metrisch Stelsel; omzetting van eenheden

In het S.I.-eenhedenstelsel maken we gebruik van prefixen (voorvoegsels) en machten van 10 om de basiseenheden aan te duiden, zie Tabel 2

Voorbeelden

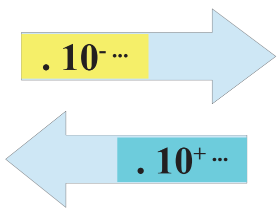
zie Figuur 2

Tab. 2: *S.I.-metrische voorvoegsels (prefixen)*

factor	prefix	symbool	benaming	decimale schrijfwijze
10^{-24}	*yocto-*	*y*	*quadriljoenste*	0, 000 000 000 000 000 000 000 001
10^{-21}	*zepto-*	*z*	*triljardste*	0, 000 000 000 000 000 000 001
10^{-18}	*atto*	*a*	*triljoenste*	0, 000 000 000 000 000 001
10^{-15}	*femto*	*f*	*biljardste*	0, 000 000 000 000 001
10^{-12}	pico-	p	biljoenste	0, 000 000 000 001
10^{-9}	nano-	n	miljardste	0, 000 000 001
10^{-6}	micro-	µ	miljoenste	0, 000001
10^{-3}	milli-	m	duizendste	0, 001
10^{-2}	centi-	c	honderdste	0, 01
10^{-1}	deci-	d	tiende	0, 1
10^{0}			één	1
10^{1}	deca-	da	tien	10
10^{2}	hecto-	h	honderd	100
10^{3}	kilo-	k	duizend	1000
10^{6}	mega-	M	miljoen	1 000 000
10^{9}	giga-	G	miljard	1 000 000 000
10^{12}	tera-	T	biljoen	1 000 000 000 000
10^{15}	*peta-*	*P*	*biljard*	1 000 000 000 000 000
10^{18}	*exa-*	*E*	*triljoen*	1 000 000 000 000 000 000
10^{21}	*zetta-*	*Z*	*triljard*	1 000 000 000 000 000 000 000
10^{24}	*yotta*	*Y*	*quadriljoen*	1 000 000 000 000 000 000 000 000

Fig. 2: omzettingsfactor bij verandering van grootteorde

10^{-12}	10^{-9}	10^{-6}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	10^{0}	10^{+1}	10^{+2}	10^{+3}	10^{+6}	10^{+9}	10^{+12}
pico	nano	micro	milli	centi	deci	1	deca	hecto	kilo	Mega	Giga	Tera
p	n	µ	m	c	d		da	h	k	M	G	T



$2,7\,\mu m = 2,7\,micrometer = 2,7.10^{-6}\,m$

$14\,s = 14.10^{+3}\,ms = 1,4.10^{+4}\,ms$

Dikwijls moeten we de eenheid van een grootheid omzetten in een andere eenheid. We noemen dit **eenhedenconversie**. Bijvoorbeeld je wil 2 omloopperioden van de aarde rond de zon (2 jaar) uitdrukken in seconden. We drukken eerst de oude eenheid (jaar) uit in nieuwe eenheden (seconden):

$$\begin{aligned} 1\,jaar &= 365,24\,dagen \\ 1\,dag &= 24\,uren \\ 1\,uur &= 60\,minuten \\ 1\,minuut &= 60\,s \\ 1\,jaar &= 365,24.24.60.60\,s = 31556736\,s \end{aligned}$$

We vermenigvuldigen dan de getalwaarde in oude eenheden met een **conversiefactor** die eigenlijk "1" is uitgedrukt als een verhouding met nieuwe eenheden in de teller en oude eenheden in de noemer, t.t.z. $\frac{31556736\,s}{1\,jaar}$:

$2\,jaar.\left(\frac{31556736\,s}{1\,jaar}\right) = 63\,113\,472\,s$

Als we $3,68.10^4\,s$ willen omzetten in minuten, dan vermenigvuldigen we met een conversiefactor met seconden in de noemer en minuten in de teller als volgt:

$3,68.10^4.\left(\frac{1\,minuut}{60\,s}\right) = 613\,minuten$

De metrische voorvoegsels worden uiteraard ook gebruikt bij de eenheden van niet-basisgrootheden. Zo is bijvoorbeeld 1 kilocalorie de hoeveelheid energie nodig om de temperatuur van 1 kg zuiver water met 1 graad Celsius te doen stijgen. De S.I.-eenheid van energie is Joule. De relaties zijn:

$1\,kcal = 10^3 cal$ en $1\,cal = 4,1868\,J$ (Joule)

1.3 Rekenen met meetresultaten: beduidende cijfers en afronding

Meetresultaten hebben steeds een beperkte nauwkeurigheid. De nauwkeurig kan zeer groot zijn, ze is altijd eindig. Je moet dus in natuurkunde steeds voor ogen houden dat getallen niet een oneindig grote nauwkeurigheid hebben, zoals de reële getallen in de wiskunde.

Voorbeeld

Als je op de badkamerweegschaal gaat staan en je rapporteert je gewicht als $m = 64,951734\,kg$ dan is dit onzin. Alle cijfers rechts van de 9 zijn betekenisloos omdat de nauwkeurigheid van de weegschaal slechts $0,1\,kg$ is. Als je een getal noteert dat de waarde van een meetresultaat voorstelt, dan mag je enkel de beduidende cijfers noteren.

De beduidende cijfers zijn degene die zinvol zijn naargelang de nauwkeurigheid van het meetresultaat. Voor de notatie van getalwaarden gelden de volgende afspraken.

1.3.1 Beduidende cijfers

- leidende nullen (*Eng. leading zeros*) zijn geen beduidende cijfers (BC)
- eindigende nullen (*Eng. trailing zeros*) zijn wel BC
- de schrijfwijze (decimale, wetenschappelijke) mag het aantal BC niet beïnvloeden
- het meest linkse BC heeft de hoogste rang (meest beduidend), het meest rechtse BC de laagste rang (minst beduidend)

Voorbeelden

$l = 2,34\,m$ (3 BC), $m = 0,02100\,kg$ (4 BC), $v = 2500\,{}^{\mathrm{km}}/_{\mathrm{u}}$ (4 BC) bij voorkeur met wetenschappelijke notatie $v = 2,500.10^3\,{}^{\mathrm{km}}/_{\mathrm{u}}$

1.3.2 Afronden

In berekende getalwaarden zal je dus steeds moeten afronden overeenkomstig de nauwkeurigheid van de gebruikte getalwaarden in de berekening. M.a.w. een deel van cijfers die je op het display van je rekenmachine ziet verschijnen na een berekening, of in de berekende celwaarden in een computerspreadsheet (rekenblad), moet je dus meestal laten vallen in de notatie van het eindresultaat. Deze operatie heet afronden. Er gelden enkele regels bij het correct afronden.

Als het eerste cijfer dat zal wegvallen groter dan of gelijk aan 5 is, dan verhoog je het laatste BC (laagste in rang) met 1. In het ander geval blijft het laatste BC ongewijzigd.

Voorbeelden

$0,00785\,m$ of $0,00787\,m$ afgerond op 2 BC geeft $0,0079\,m$; $1243\,l$ afgerond op 3 BC geeft $124.10^1\,l = 1,24.10^3\,l$.

De volgende vuistregels worden gebruikt om een eindresultaat tot op het gewenste aantal BC af te ronden.

1.3.3 som/verschil regel

Het laatste BC van een som of verschil van meetresultaten komt in rang overeen met het laatste BC van de minst nauwkeurige term.

Voorbeelden

$41,8\,cm + 3,74\,cm = 45,6\,cm$; $10,7\,cm - 5,2\,mm = 10,2\,cm = 102\,mm$

Tab. 3: enkele typische grootteordes

atoomkern	$10^{-15}\,m$
atoom	$10^{-10}\,m$
menselijk DNA-streng	$2\,m$!
virus, bacterie	$10^{-6}\,m$
diameter menselijk haar	$10^{-4}\,m$
omtrek aarde	$10^{+7}\,m$
afstand aarde-zon	$10^{+11}\,m$

1.3.4 product/deling regel

Het aantal BC van het resultaat is ten hoogste gelijk aan het aantal BC die voorkomen in de factor met het kleinste aantal BC.

Voorbeelden

$41,8\,cm\ .\ 3,74\,cm = 156\,cm^2$; $32\,g\ :\ 0,2\,g = 2.10^2$

1.4 Grootteorde

Fysica is heel wat minder abstract als je je enkele typische grootteordes kunt voorstellen, zoals in Tabel 3.

1.5 Vaak voorkomende formules

1.5.1 Omtrek

zie Figuur 3

rechthoek $2(l + b)$

vierkant $4z$

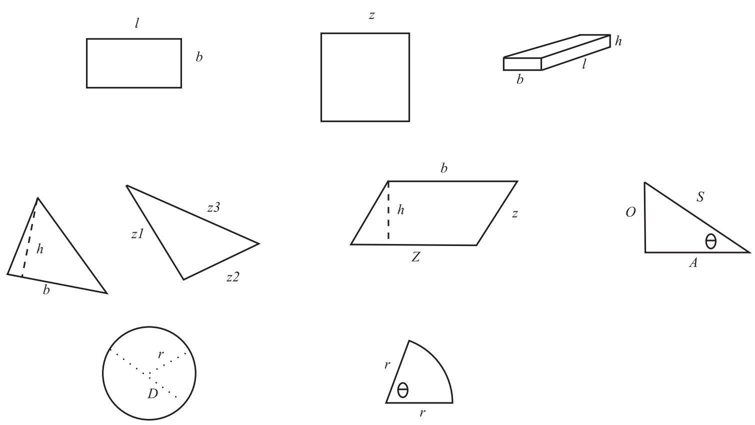
driehoek $z_1 + z_2 + z_3$

parallellogram $2(Z + z)$

cirkel $2\pi r = \pi D$

cirkelbooglengte $r\theta$

Fig. 3: basisformules



1.5.2 Oppervlakte

rechthoek	lb
vierkant	z^2
driehoek	$\frac{bh}{2}$
parallellogram	bh
schijf	$\pi r^2 = \frac{\pi D^2}{4}$
schijfsector	$\frac{1}{2}\theta r^2$

1.5.3 Volume

balk	lbh
cilinder	$\pi r^2 h$
bol	$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{6}\pi D^3$

1.5.4 Rechthoekige driekhoeken

cosinus	$cos\theta = \frac{A}{S}$ (“CAS”)
sinus	$sin\theta = \frac{O}{S}$ (“SOS”)
tangens	$tg\theta = \frac{O}{A}$ (“TOA”)
Pythagorasregel	$S^2 = A^2 + O^2$

2 Oefeningen

2.1 Getalwaarden en eenheden

2.1.1 *Caraphractus cinctus* is een vliesvleugelig insect (een soort wesp) uit de familie Mymaridae. De massa van dit insect is $5.10^{-6}\,kg$. Doe de eenhedenconversie naar (1) gram (g), (2) milligram (mg) en (3) microgram (µg).

1. $5.10^{-6}\,kg.\left(\frac{1000\,g}{1\,kg}\right) = 5.10^{-3}\,g$
2. $5.10^{-6}\,kg.\left(\frac{10^6\,mg}{1\,kg}\right) = 5\,mg$
3. $5.10^{-6}\,kg.\left(\frac{10^9\,\mu g}{1\,kg}\right) = 5.10^3\,\mu g$

2.1.2 Vesna Vulović is een Joegoslavisch voormalig stewardess die op 26 januari 1972 een val van $6\,mi$ en $551\,yd$ (6 mijl en 551 yards) uit een vliegtuig overleefde, zonder daarbij over een valscherm te beschikken. Hoe hoog was dat in meter uitgedrukt? ($1\,yd = 36\,in$)

$6\,mi = 6\,mi.\left(\frac{1\,m}{0{,}6214.10^{-3}mi}\right) = 9656\,m$

$551\,yd = 551\,yd.\left(\frac{36\,in}{1\,yd}\right) = 19836\,in = 19836\,in.\left(\frac{2{,}54\,cm}{1\,in}\right) = 50383\,cm = 504\,m$

Dus: $10160\,m$!

2.1.3 1 lichtjaar is de afstand die licht in het luchtledige aflegt in 1 jaar. (1) Hoe groot is een lichtjaar uitgdrukt in meter? (lichtsnelheid in luchtledige: $3.10^5\,{}^{\mathrm{km}}\!/\!_{\mathrm{s}}$), en (2) de afstand van de zon tot de meest naburige ster Proxima Centauri is ongeveer 4 lichtjaar, druk deze afstand uit in kilometer.

1. $3.10^5\,km/s.\left(\frac{10^3\,m}{1\,km}\right).\left(\frac{365{,}24.24.60.60\,s}{1\,jaar}\right) = 9,5.10^{15}\,m$ (9,5 biljard meter of petameter)
2. $4.9,5.10^{15}\,m.\left(\frac{1\,km}{1000\,m}\right) = 38.10^{12}\,km = 3,8.10^{13}\,km$ (38 biljoen km of 38 Pm)

2.1.4 Een producent beweert dat $100\,g$ cornflakes overeenkomt met $375\,kcal$ en dat deze portie $4,2\,\mu g$ aan vitamine B12 bevat. (1) Hoeveel kilogram water kan je met deze energiehoeveelheid met $1°C$ warmer maken indien je deze energie volledig als warmte-energie zou kunnen aanwenden? (2) in hoeveel gram cornflakes zitten er $1\,g$ vitamine B12? en (3) hoeveel maal de aanbevolen dagelijkse hoeveelheid (ADH) vitamine B12 krijg je binnen met een portie van $100\,g$ cornflakes als er volgens de producent in een portie van $30\,g$ $50\,\%$ van de ADH vitamine B12 zit?

1. $375\,kg$!!

2. $100\,g.\left(\frac{1\,g}{4{,}2.10^{-6}\,g}\right) = 24\,000\,000\,g$!
3. $1,7$ maal

2.2 Beduidende cijfers en afronding

2.2.1 $4,3\,kg + 16,57\,kg + 91,5\,kg =$

2.2.2 $0,08\,cm.0,625\,cm.0,05\,mm =$

2.2.3 $2\pi.(0,22\,m)^2 =$

2.2.4 $(4,32.1,23) - 5,1 =$

2.3 Gemengde oefeningen (eenhedensconversies, beduidende cijfers en afronding)

2.3.1 Internet time: 1 dag $=$ 1000 beats: hoe oud ben je (3 BC)?

2.3.2 Epoch time: aantal seconden sinds 0h 1 januari 1970 (gebruikt door Unix systemen): hoe laat is het nu (8 BC)?

2.3.3 eenheden temperatuur: maak een rationale eenheid van temperatuur zodat $1\,kg$ water opwarmen van 1 graad overeenkomt met toevoeging van 1 Joule energie

2.3.4 snelheidsmeter van een auto heeft een precisie van $1\,\mathrm{km}/\mathrm{u}$. Je uurwerk heeft een precisie van $1\,s$. Tot hoeveel BC mag je in je (rijdende) auto nog af te leggen afstanden bepalen?

Deel II. Beweging natuurkundig beschrijven

In dit deel introduceren we de vectoriële beschrijving van beweging.

3 Natuurkundige voorstelling van beweging

In het dagelijks leven nemen we beweging van materie waar. We maken ook gebruik van beweging (o.a. voor transport) en voeren zelf ook beweging uit. In fysica denken we na over en onderzoeken we de wetmatigheden van beweging, en beschrijven we beweging met conceptuele tools: assenstelsels, vectoren, grafieken en wiskundige vergelijkingen.

In computergames (bv. SimCity) wordt gebruik gemaakt van zogenaamde "physics engines". Dat kun je zien als softwarecode waarin geprogrammeerd is hoe de werkelijke wereld natuurkundig werkt, bijvoorbeeld hoe de zwaartekracht de beweging van materie beïnvloedt, hoe gebouwen gaan trillen bij een aardbeving enz. Met andere woorden computergames zijn een zeer goed voorbeeld van hoe natuurkundige kennis gebruikt kan worden om de werkelijkheid zo natuurgetrouw mogelijk na te bootsen. Het gedetailleerd voorstellen van bewegingen speelt hierin een belangrijke rol.

3.1 Translatie en rotatie

In het algemeen vatten we beweging op als een combinatie van translatie en rotatie, zie Figuur 4.

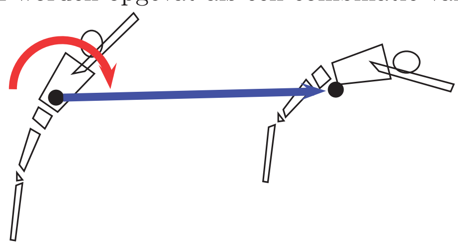
translatie is een verandering van de plaats (positie) ofwel verplaatsing van het voorwerp in de ruimte

rotatie is een verandering van de oriëntatie van het voorwerp in de ruimte

Merk op dat beide soorten beweging op te vatten zijn als veranderingen: van positie (bij translatie) en van oriëntatie (bij rotatie).

We beperken ons hier tot het beschrijven van de translatiecomponent van de beweging.

Fig. 4: beweging kan worden opgevat als een combinatie van translatie en rotatie



Voorbeelden

- atleet bij 400 m spurt op de atletiekpiste
- rollende bowling bal
- planeet in omloop rond de zon
- enz.

3.2 De ruimte als referentie: rechtshandige rechthoekige coördinatenstelsels

Als waarnemer in de 3-dimensionale ruimte beschrijf je je visuele verhouding tot de omgeving in normale rechtopstaande houding d.m.v.

referentiepunt je eigen positie, of oorsprong

gezichtslijn 1e dimensie of de horizontaal van achter naar voor

horizontaal 2e dimensie of de horizontaal van rechts naar links

vertikaal 3e dimensie of de vertikaal van onder naar boven

Deze drie dimensies stellen we voor als georiënteerde rechten die loodrecht op elkaar staan en elkaar snijden in één punt dat we de oorsprong noemen.

De oriëntatie van de assen is rechtshandig: x-as volgens de wijsvinger, y-as volgens de middenvinger en z-as volgens de duim, zie Figuur 5

Fig. 5: oriëntatie van de assen bij een rechtshandig rechthoekig assenstelsel

In de praktijk gebruiken we rechtshandige assenstelsels om de ruimte te beschrijven **vanuit eender welk standpunt**, dus niet enkel het eigen standpunt van de waarnemer.

3.3 Materie: stoffelijk punt en positievector

Bewegende materie (in de vaste stof aggregatietoestand) stellen we voor als een verzameling punten in een 3-dimensionale Euclidische vectorruimte, zie Figuur 7 . Bij het beschouwen

Fig. 6: rechtshandig rechthoekig assenstelsel

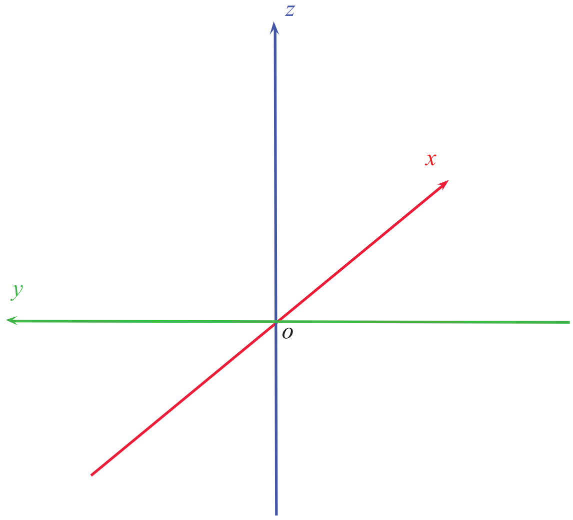
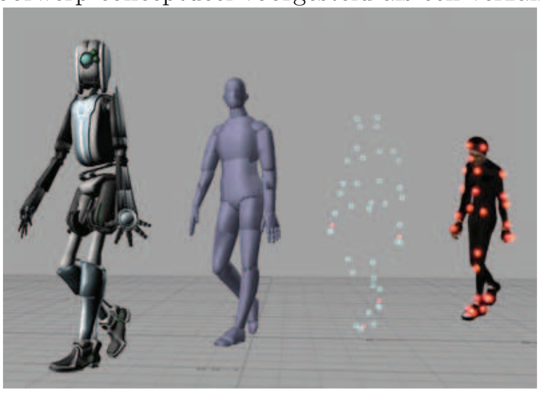
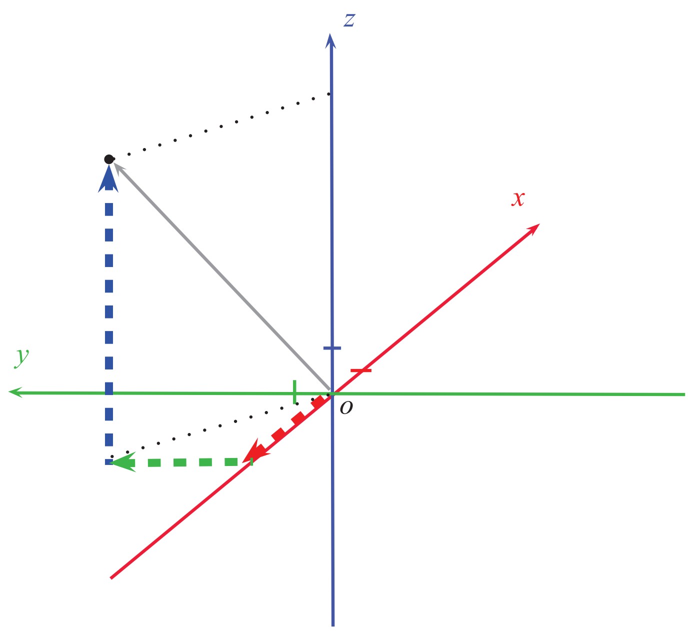


Fig. 7: vast voorwerp conceptueel voorgesteld als een verzameling punten



van de translatie-component van de beweging, kan deze voorstelling zelfs herleid worden naar 1 enkel punt, zie Figuur 8. Dit punt is een conceptuele voorstelling van een materieel object en wordt **stoffelijk punt** genoemd.

Fig. 8: conceptuele voorstelling van een vast voorwerp waarvan enkel de translatiebeweging door de ruimte wordt beschouwd, als een punt in een 3-dimensionale Euclidische vectorruimte



De voorstelling in Figuur 8 laat toe om de lokatie of de positie van een stoffelijk punt in de ruimte als volgt te beschrijven:

positievector grafische voorstelling: een pijl getrokken vanuit de oorsprong naar het beschouwde punt; de **richting** van de positievector is **volgens de verbindingslijn** oorsprong-beschouwde punt; de **zin** van de positievector is **van** oorsprong **naar** beschouwd punt; de positievector wordt beschouwd als een denkbeeldige verplaatsing “in vogelvlucht” van het stoffelijk punt vanuit de oorsprong tot in het beschouwde punt. De **kop** van de positievector is het beschouwde punt, de **staart** van de positivector is de oorsprong van het assenstelsel

componentvectoren of kortweg: **componenten**; grafische voorstelling: de sequentie van 3 denkbeeldige verplaatsingen vanuit de oorsprong langs x-as, y-as en z-as leidend tot een verplaatsing vanuit de oorsprong naar het beschouwde punt

coördinaten cartesische voorstelling: 3 getallen die de lengtes (of de afstanden) en de zin van de verplaatsingen langs de assen voorstellen en aldus de positie van het stoffelijk punt t.o.v. het assenstelsel volledig bepalen.

We geven Figuur 8 weer in 2-dimensionale vlakke projecties in Figuur 9.

In wat volgt zullen we ons beperken tot het beschrijven van beweging in een vlak, m.a.w. we zullen genoeg hebben aan 2-dimensionale assenstelsels.

Fig. 9: vlakke projecties ter illustratie van de begrippen positievector, vectorcomponenten en coördinaten

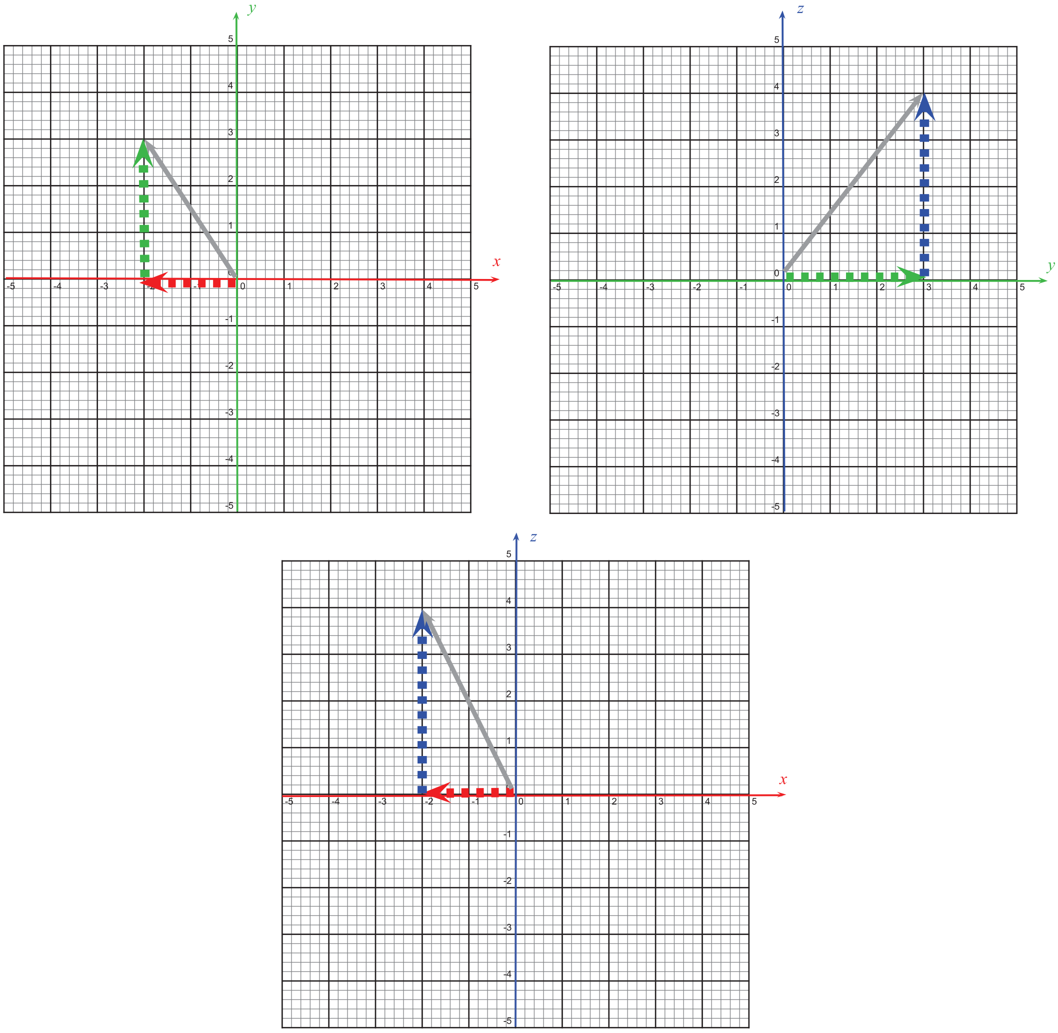
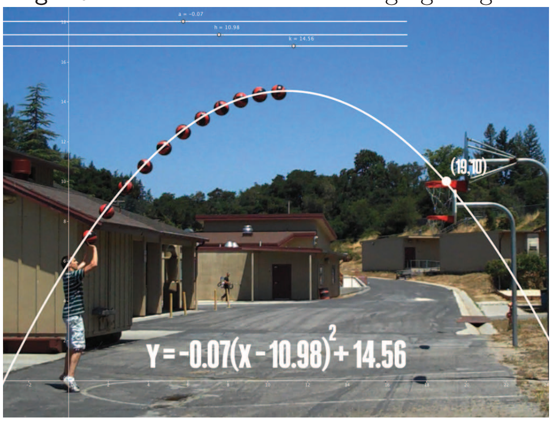


Fig. 10: voorbeeld van een bewegingsdiagram



3.4 Bewegingsdiagrammen

Een **bewegingsdiagram** is een conceptuele voorstelling proefondervindelijke meetgegevens van een reële beweging, zie Figuur 10. Een bewegingsdiagram omvat informatie over:

ruimte d.m.v. een assenstelsel

tijd d.m.v. een conceptuele timer met een ingestelde time-lapse of tijdsinterval (of tik). Een tik is typisch enkele tienden of honderdsten van een seconde, overeenkomend met bv. een aantal frames per seconde (fps) bij een video-opname van een beweging

plaats d.m.v. positievector van het stoffelijk punt bij iedere tik van de timer

beweging d.m.v. verplaatsingsvectoren = vectoren wijzend van de kop van één positievector naar de kop van de eerste daaropvolgende positievector. De verplaatsingsvector is een maat voor de **gemiddelde snelheidsvektor**.

bewegingsverandering d.m.v. veranderingsvectoren van de verplaatsingsvectoren = vectoren wijzend van de kop van één verplaatsingsvector naar de kop van de eerste daaropvolgende verplaatsingsvector. De veranderingsvector van de verplaatstingsvector is een maat voor de **gemiddelde versnellingsvector**.

In Figuur 11 wordt dit geïllustreerd.

3.5 Bewegingspatronen

Een beperkt aantal vaak voorkomende bewegingspatronen laat zich onderscheiden.

3.5.1 Rust

de verplaatsingsvector is na elke tik constant en gelijk aan de nulvector, zie Figuur 12

Fig. 11: aspecten van een natuurkundig bewegingsdiagram

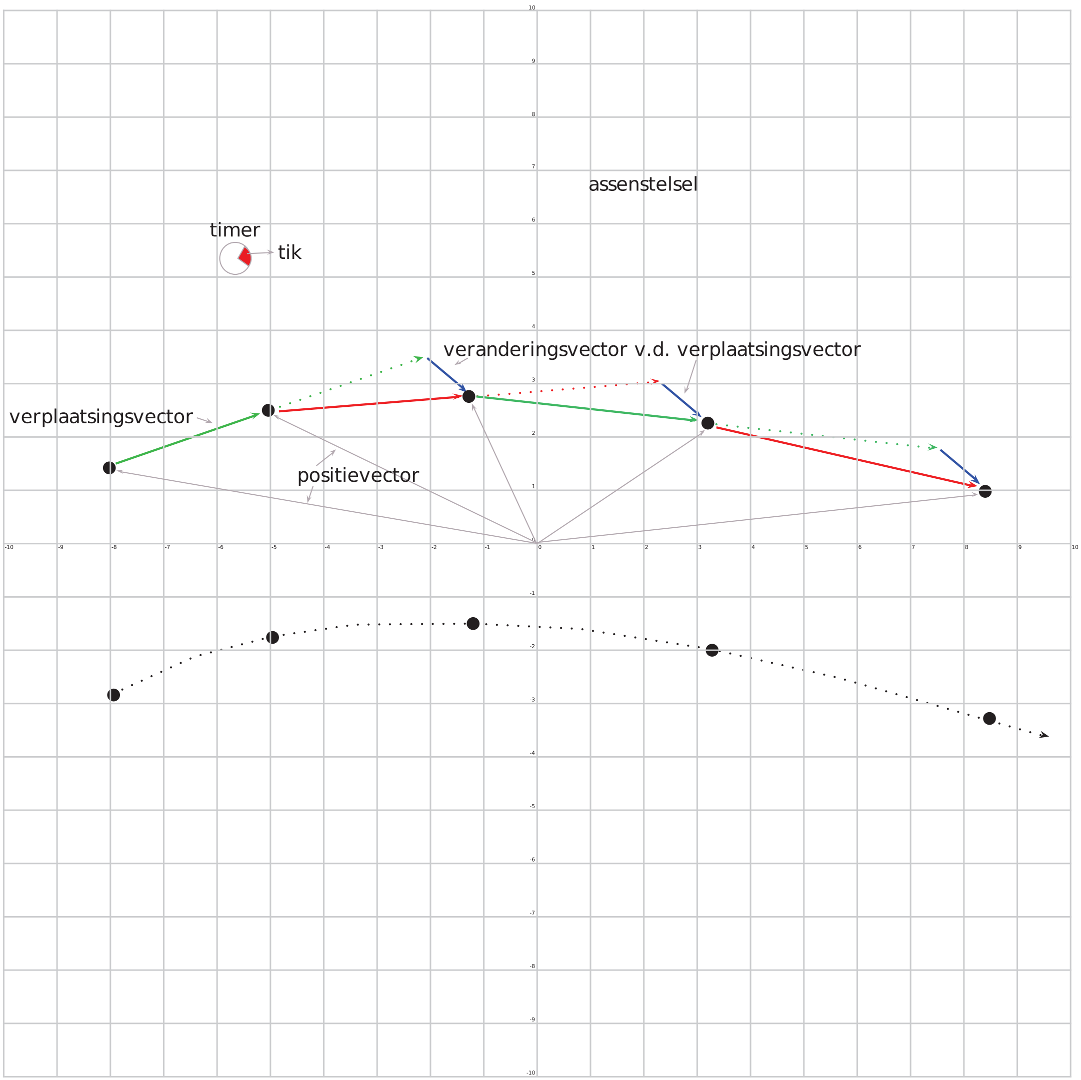
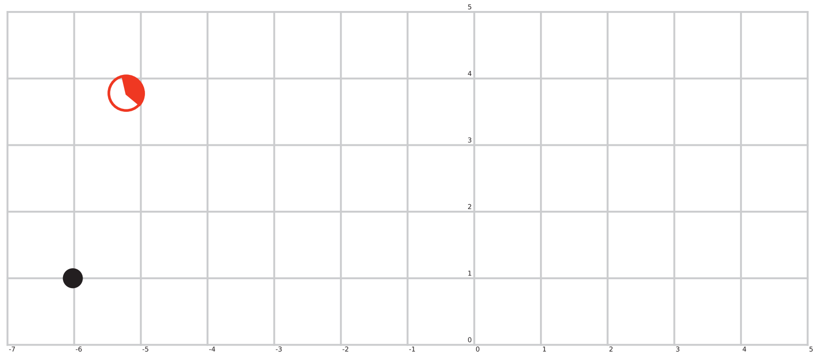


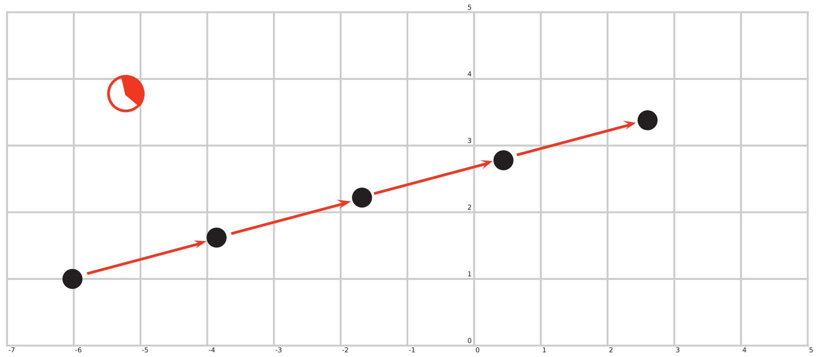
Fig. 12: bewegingsdiagram bij rust



3.5.2 Eenparige rechtlijnige (of lineaire) beweging (uniform linear motion)

de verplaatsingsvector is na elke tik constant, zie Figuur 13

Fig. 13: bewegingsdiagram bij de eenparige rechtlijnige beweging (uniform linear motion): bewegingspatroon met constante verplaatsingsvector

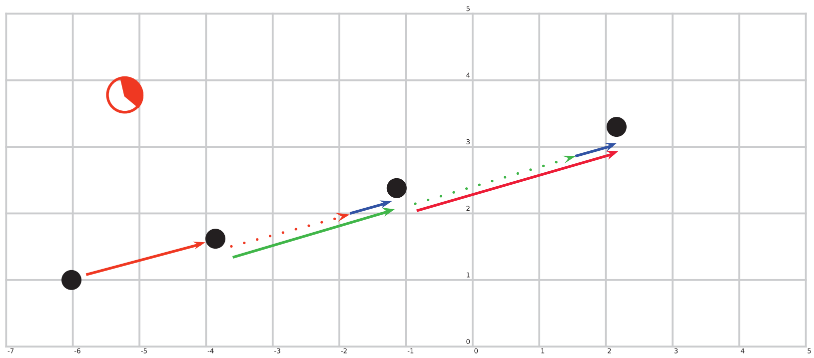


Voorbeeld wandelen aan een constant tempo

3.5.3 Eenparig versnelde rechtlijnige beweging (uniform accelerated linear motion)

Variant A de veranderingsvector van de verplaatsingsvector is constant na elke tik, en heeft dezelfde richting (=evenwijdig) en dezelfde zin als de verplaatsingsvector, zie Figuur 14

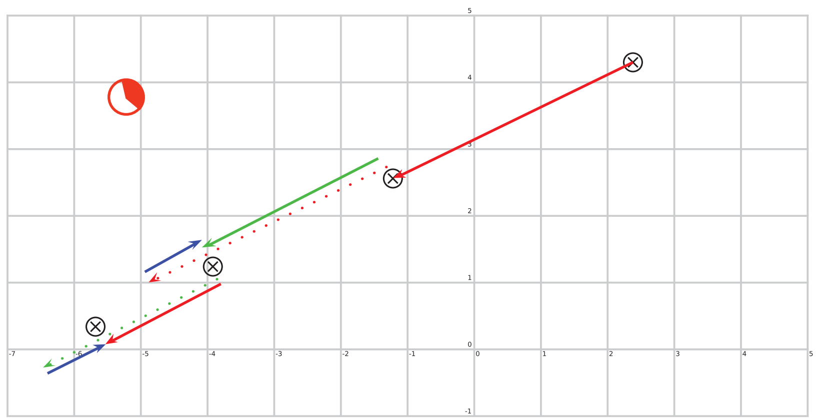
Fig. 14: bewegingsdiagram bij de eenparige versnelde rechlijnige beweging (uniform accelerated motion): constante veranderingsvector van de verplaatsingsvector met dezelfde richting en zin



Voorbeeld $100\,m$ sprinter in de eerste seconde van de spurt

Variant B
de veranderingsvector van de verplaatsingsvector is constant tijdens elk opeenvolgend tijdsinterval, en heeft dezelfde richting (= evenwijdig) maar heeft tegengestelde zin, zie Figuur 15

Fig. 15: bewegingsdiagram bij de eenparige versnelde rechlijnige beweging (uniform accelerated motion): constante veranderingsvector van de verplaatsingsvector, met dezelfde richting maar tegengestelde zin

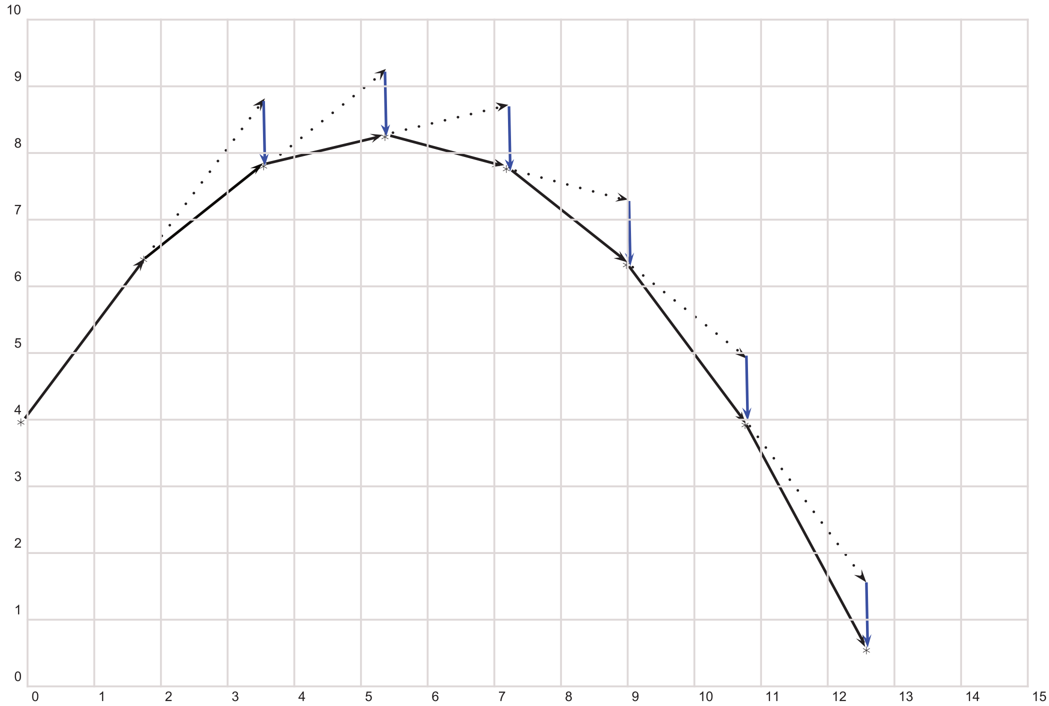


Voorbeeld auto tijdens remmen

3.5.4 projectielbeweging (of paraboolbeweging)

Het bewegingsdiagram bij de projectielbeweging vertoont net zoals bij de eenparige versnelde rechtlijnige beweging een constante veranderingsvector van de verplaatsingsvector, maar in dit geval heeft de veranderingsvector niet dezelfde richting als de verplaatsingsvector (de vectoren zijn dus niet evenwijdig) , zie Figuur 16

Fig. 16: bewegingsdiagram bij de projectielbeweging



3.6 Eigenschappen van vectoren

We hebben vectoren ingevoerd als conceptuele gereedschappen waarmee we positie, verplaatsing en verandering van verplaatsing ruimtelijk willen beschrijven. De eigenschappen van vectoren worden in de wiskunde uitvoerig bestudeerd. Zonder echter op een diepgaande wiskundige behandeling in te gaan, is het op dit punt perfect mogelijk om de basiseigenschappen van vectoren te begrijpen en te beschrijven. We bespreken deze eigenschappen nu één voor één.

3.6.1 Som en verschil van 2 vectoren

De verplaatsingsvector van een eerste positie naar een tweede positie is een voorbeeld van het verschil van twee vectoren, zie Figuur 17. Laten we de volgende notaties invoeren:

- positievector 1: $\overrightarrow{r_1}$ met componenten $(x_1, y_1) = (5, 6)$

- positievector 2: $\overrightarrow{r_2}$ met componenten $(x_2, y_2) = (-3, 4)$
- verplaatsingsvector van positie 1 naar 2: $\Delta\overrightarrow{r_{12}}$ met componenten $(x_{12}, y_{12}) = (-8, -2)$

Je kan gemakkelijk de volgende relaties zien:

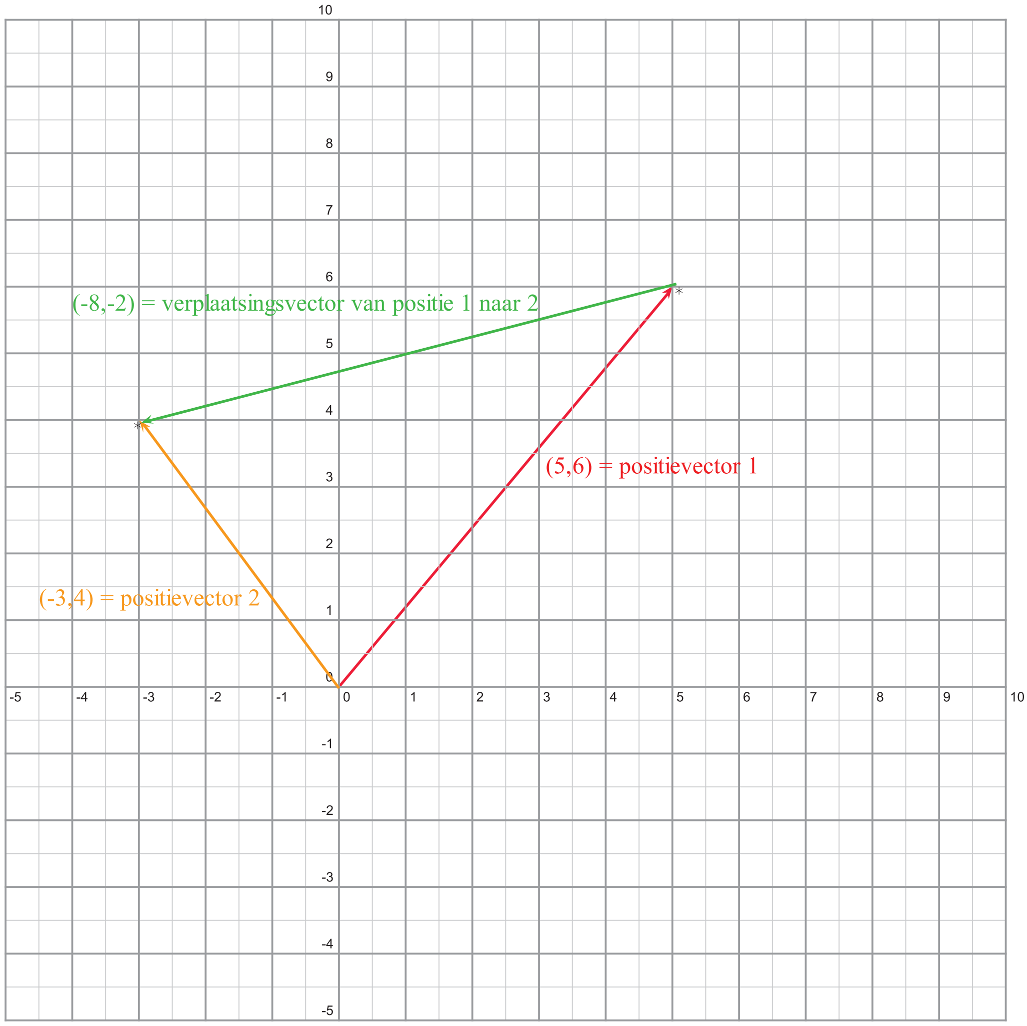
- $x_2 - x_1 = -3 - 5 = -8 = x_{12}$
- $y_2 - y_1 = 4 - 6 = -2 = y_{12}$
- $x_1 + x_{12} = 5 + (-8) = -3 = x_2$
- $y_1 + y_{12} = 6 + (-2) = 4 = y_2$

M.a.w. de verplaatsingsvector van positie 1 naar positie 2 heeft als componenten $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ (Let op de volgorde!)

We definiëren de **somvector** van 2 vectoren $\overrightarrow{A}(A_x, A_y)$ en $\overrightarrow{B}(B_x, B_y)$, als:
voor elke 2 vectoren $\overrightarrow{A}(A_x, A_y)$ en $\overrightarrow{B}(B_x, B_y)$ geldt:

- notatie: $\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}$
- componenten : $(A_x + B_x, A_y + B_y)$
- constructie: kop-staart methode of parallelogram methode, zie Figuur 18
- de som van 2 vectoren is commutatief: $\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} = \overrightarrow{B} + \overrightarrow{A}$

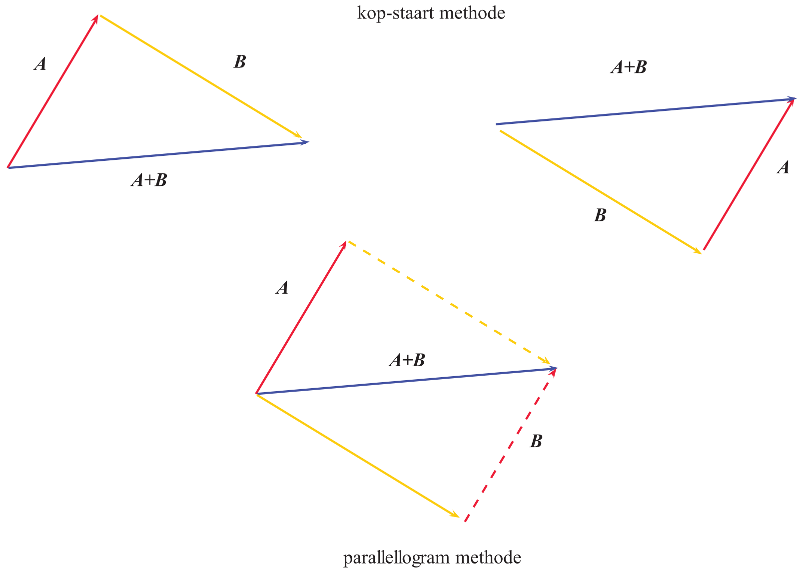
Fig. 17: de verplaatsingsvector als verschil van twee positievectoren



We definiëren de **verschilvector** van 2 vectoren $\overrightarrow{A}(A_x, A_y)$ en $\overrightarrow{B}(B_x, B_y)$, als:
voor elke 2 vectoren $\overrightarrow{A}(A_x, A_y)$ en $\overrightarrow{B}(B_x, B_y)$ geldt:

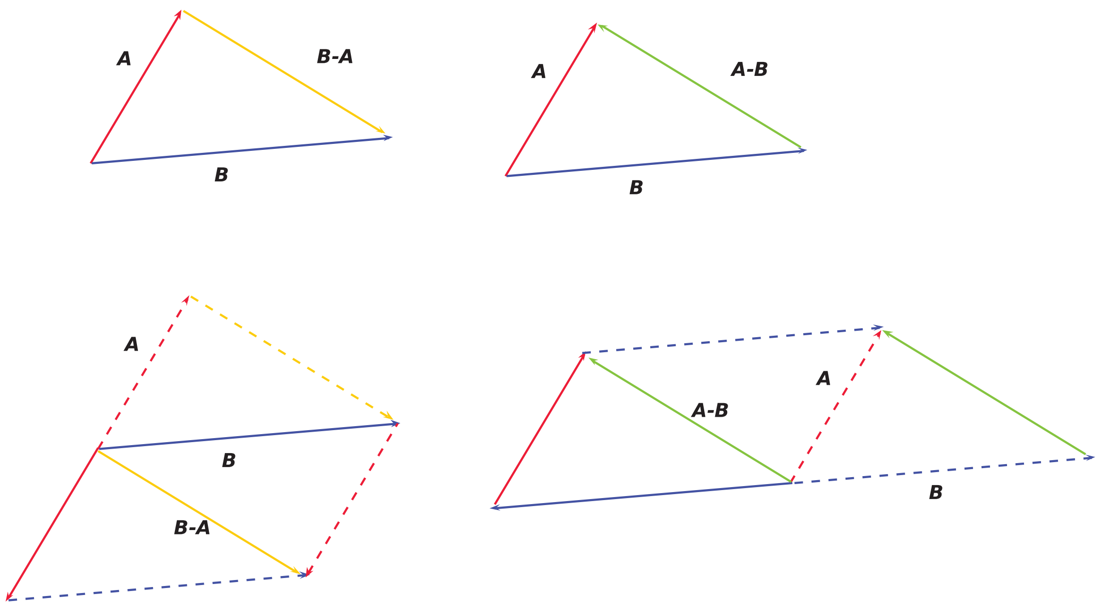
- notatie: $\overrightarrow{A} - \overrightarrow{B}$
- componenten : $(A_x - B_x, A_y - B_y)$
- constructie: zie Figuur 19
- het verschil van 2 vectoren is anti-commutatief: $\overrightarrow{A} - \overrightarrow{B} = -(\overrightarrow{B} - \overrightarrow{A})$

Fig. 18: kop-staart methode en parallellogram methode voor de som van twee vectoren



Toepassing De verplaatsingsvector van positie 1 (met positievector $\overrightarrow{r_1}$) naar positie 2 (met positievector $\overrightarrow{r_2}$) is de verschilvector $\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}$, zie Figuur 17. Let op de volgorde!

Fig. 19: verschil van twee vectoren

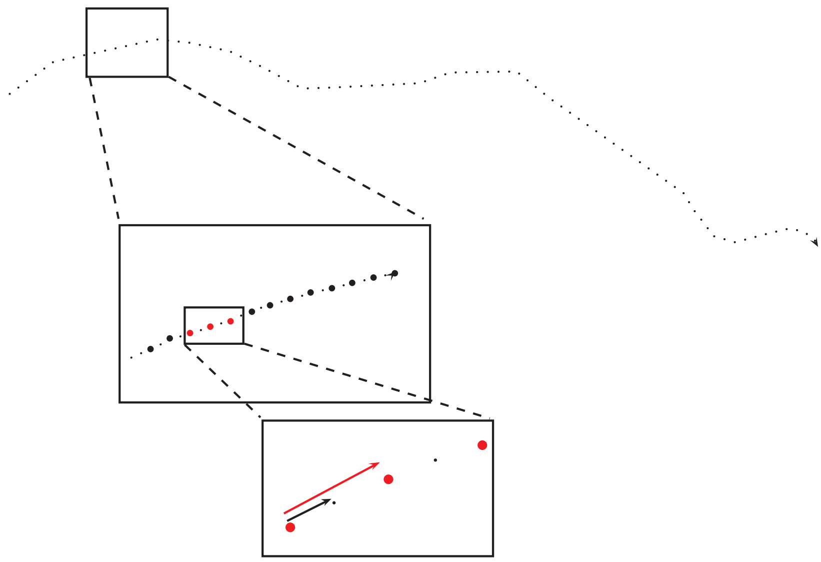


3.6.2 Product van een vector met een reëel getal

In een bewegingsdiagram nemen we de tik-tijdsintervallen typisch heel kort, enkele honderdsten tot enkele tienden van een seconde.

De tiktijdsintervallen zijn dermate kort dat we **in heel goede benadering** kunnen zeggen dat de **lengte van de verplaatsingsvector in een tik-tijdsinterval recht evenredig is met de tiktijdsinterval**, zie Figuur 20.

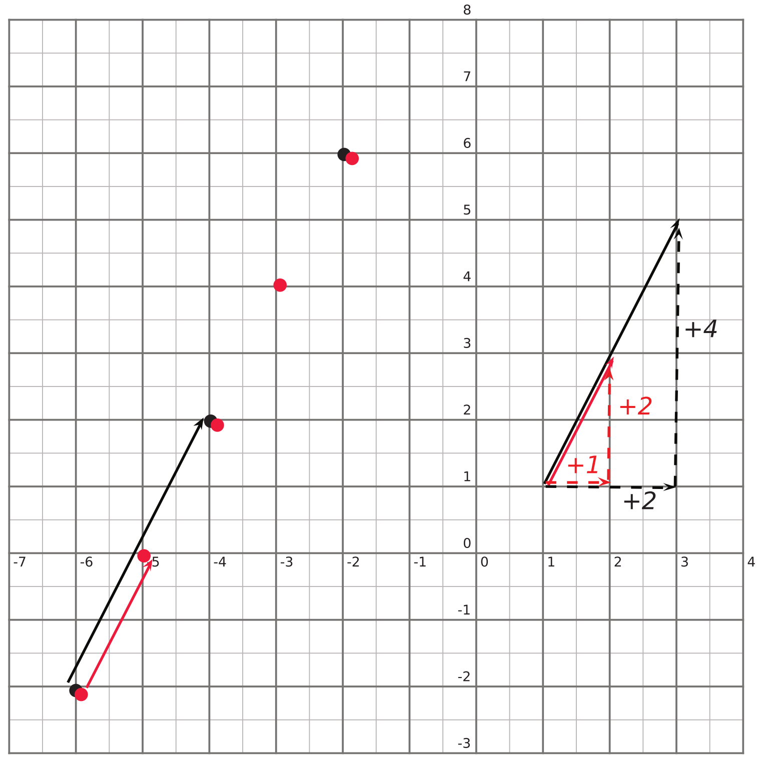
Fig. 20: bij korte tik-tijdsintervallen is de lengte van de verplaatsingsvector in heel goede benadering recht evenredig met de duur van het tik-tijdsinterval



Met andere woorden, in de helft van de tiktijd zou de lengte van de verplaatsing van het voorwerp slechts de helft bedragen, in een tiende van de tiktijd slechts een tiende, in het dubbele van de tiktijd zou de lengte van de verplaatsing het dubbele zijn enz.

In Figuur 21 wordt een deel van een bewegingsdiagram vergeleken voor 2 waarden van het tiktijdsinterval, waarbij de ene tijd het dubbele is van de andere.

Fig. 21: de lengte van de verplaatsingsvector schaalt in goede benadering recht evenredig met de duur van het tik-tijdsinterval



We definiëren de **scalaire vermenigvuldiging** van een reëel getal met een vector als: voor elke reëel getal $g \in \mathbb{R}$ en voor elke vector $\overrightarrow{A}(A_x, A_y)$ geldt:

- notatie: $g.\overrightarrow{A}$
- componenten : $(g.A_x, g.A_y)$
- constructie: zie Figuur 21

3.6.3 Elementaire vectoralgebra

De eigenschappen van vectoren laten toe om formeel te rekenen met vectoren op een analoge manier als met de vertrouwde reële getallen:

- $\overrightarrow{A} + (\overrightarrow{B} + \overrightarrow{C}) = (\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}) + \overrightarrow{C}$
- $-\overrightarrow{A} = (-1).\overrightarrow{A}$
- $\overrightarrow{A} - \overrightarrow{B} = \overrightarrow{A} + (-\overrightarrow{B})$ (zie Figuur 19)
- $g.(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}) = g.\overrightarrow{A} + g.\overrightarrow{B}$

4 Oefeningen

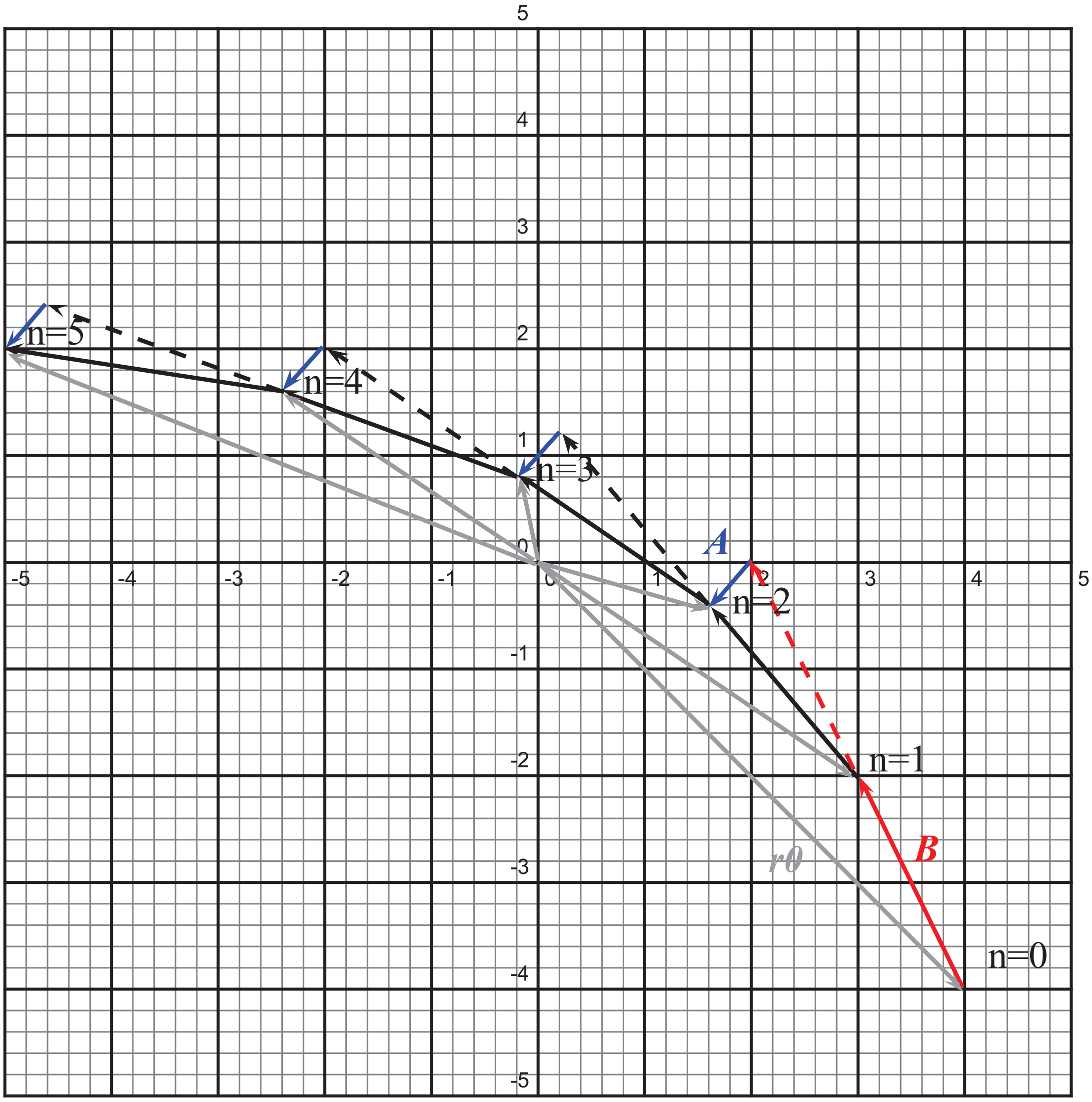
4.1 assenstelsels

4.1.1 In het klaslokaal zit een vlieg op het plafond. Het lokaal is $10m$ breed, $7m$ diep en $3,5m$ hoog. Jij zit in het midden van het lokaal met je aangezicht naar het bord, de vlieg bevindt zich ten opzichte van jou op $1m$ meer naar links en $0,5m$ meer naar voor. Maak een voorstelling van deze situatie met een assenstelsel en met de posities van jezelf en van de vlieg.

4.2 positievector, verplaatsingsvector en veranderingsvector van de verplaatsingsvector

4.2.1 zie Figuur 22 (1) REKEN de positievectoren $\overrightarrow{r_1}$ en $\overrightarrow{r_2}$ UIT (dus niet: aflezen); (2) reken ook de verplaatsingsvectoren $\overrightarrow{\Delta r_{12}}$ en $\overrightarrow{\Delta r_{45}}$ uit. Gegeven zijn de vectoren $\overrightarrow{r_0}$ $(4, -4)$, $\overrightarrow{B}$ $(-1, 2)$ en $\overrightarrow{A}$ $(-0,4; -0,4)$ (mag je wel aflezen).

Fig. 22: oefening vectorrekening, zie Oefening 4.2.1



4.3 bewegingsdiagrammen en -patronen

4.3.1 **Schets in detail de volgende bewegingsdiagrammen: (1) fietser aan tempo van $36\,{}^{\mathrm{km}}/_{\mathrm{u}}$, tiktijd $0,1\,s$; (2) vertikaal opwaarts gelanceerde tennisbal van op hoogte $0,5\,m$ boven de grond, tiktijd $0,1\,s$, initiële verplaatsingsvector $0,3\,m$ vertikaal opwaarts, verandering verplaatsingsvector $0,1\,m$ vertikaal neerwaarts**

4.3.2 **Usain Bolt liep op de finale van de $100\,m$ tijdens de wereldkampioenschappen atletiek in 2009 in Berlijn volgende tussentijden $2,89\,s$ na $20\,m$, $4,64\,s$ na $40\,m$, $6,31\,s$ na $60\,m$, $7,92\,s$ na $80\,m$ en $9,58\,s$ na $100\,m$. Welke bewegingsdiagrammen zouden er van toepassing kunnen zijn op de verschillende fasen van zijn sprint?**

4.3.3 **Schets een bewegingsdiagram voor een voorwerp dat cirkelvormig beweegt aan een constant tempo.**

4.3.4 **Vergelijk de bewegingsdiagrammen voor 3 ERB's met dezelfde bewegingsrichting. 2 hebben tegengestelde zin en hetzelfde tempo, en de 3e heeft een dubbel zo groot bewegingstempo als de vorige 2.**

4.3.5 **Herneem Oefening 4.3.4. Kies een assenstelsel waarvan de x-as samenvalt met de richting van de bewegingen (de zin kies je zelf). Schets de grafiek van de x-component van de verplaatsingsvector voor elk van de 3 ERB's als functie van de tijd (neem telkens het middentijdstip van het tiktijdsinterval).**

4.4 rekenen met vectoren

4.4.1 **Beschouw de vector $\overrightarrow{A}$ met $A_x = -4\,m$. De vector maakt een hoek van $120°$ met de x-as in tegenwijzerzin (anticlockwise). Bepaal A_y en de lengte van de vector.**

4.4.2 **Bepaal van de vector $\overrightarrow{A} = (3,15; -9,25)\,{}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}^2}$ de hoek met de x-as en de lengte.**

4.4.3 **Gegeven de vectoren $\overrightarrow{A} = (3,5; 0,0)\,{}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}}$, en $\overrightarrow{B} = (5,1; -0,3)\,{}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}}$ (1) Maak een schets. (2) Bereken en schets de vector $\overrightarrow{2,0.A + 3,1.\overrightarrow{B} + 1,6.\overrightarrow{C}}$.**

Deel III. Kinematica

In dit deel vertalen we bewegingspatronen en -diagrammen naar vergelijkingen om kwantitatieve voorspellingen te doen voor bewegingen.

5 Probleemstelling

Keer even terug naar de bewegingsdiagrammen bij een eenparige versnelde rechtlijnige beweging (zie Figuur 14 en Figuur 15) en bij een projectielbeweging (zie Figuur 16).

De bewegingsdiagrammen zijn heel goed geschikt om de patronen in de bewegingen voor te stellen. De diagrammen zijn op zich niet zo heel erg geschikt om voorspellingen over de beweging uit rekenen. Om dit aan te voelen, doe even de volgende oefening.

OEFENING. Een bowlingbal wordt gelanceerd. Beschouw de beweging van de bal vanaf het moment dat de bal de hand van de bowler verlaat. De verplaatsingssvector in het eerste tik-tijdsinterval met duur $0,1\,s$ is $1\,m$ lang. Veronderstel dat in elk tik-tijdsinterval daarna de verplaatsingsvector met $0,04\,m$ korter wordt. Hoe lang duurt het voor de bal om een verplaatsing van $10m$ te maken?

Oplossing: laten we het starttijdstip $t_0 = 0\,s$ nemen. Keuze assenstelsel: oorsprong samenvallend met de startpositie van de bal, de x-as volgens de richting van de baan en de zin van bal naar target. In tabelvorm voorgesteld kunnen we met de gegevens in het vraagstuk Tabel 4 uitrekenen.

Tab. 4: positie versus tijdstip data voor bowling bal oefening

tijdstip $t(s)$	positie $x(m)$
0,0	0,00
0,1	1,00
0,2	1,96
0,3	2,88
0,4	3,76
0,5	4,60
0,6	5,40
0,7	6,16
0,8	6,88
0,9	7,56
1,0	8,20
1,1	8,82
1,2	9,40
1,3	9,94
1,4	10,44

Met andere woorden, na wat repetitief rekenwerk vinden we dat de bal de positie $x = +10\,m$ bereikt tussen de $1,3\,s$ en de $1,4\,s$. En foutief antwoord zou zijn: in de eerste seconde legt de bal $1\,m$ af, dat is dus $10\,$m/s, met andere woorden de bal heeft $1\,s$ nodig om $10\,m$ af te leggen. Wat is er foutief aan deze redenering?

Dit voorbeeld toont dat het handig zou zijn om de regelmaat of het patroon van de beweging te vertalen in formules of vergelijkingen die toelaten het verband te berekenen tussen het tijdsverloop dat verstreken sinds het initiële tijdstip en bijvoorbeeld de positie na dit tijdsverloop. Dat is exact wat er beoogd wordt met de zogenaamde bewegingsvergelijkingen.

6 Bewegingsvergelijking bij EVRB en projectielbeweging

Dankzij de vectorvoorstelling kunnen we in één adem bewegingsvergelijkingen opstellen voor alle bewegingspatronen waarbij de veranderingsvectoren van de verplaatstingsvector constante vectoren zijn. Dit gaat op voor de eenparige versnelde rechtlijnige beweging (zie Figuur 14 en Figuur 15) en voor de projectielbeweging (zie Figuur 16). Ook voor de eenparige rechtlijnige beweging gaat dit op, maar dit is een bijzonder geval waarbij die veranderingsvectoren steeds nul zijn.

Misschien is het je ook opgevallen dat we tot hiertoe nog niet gesproken hebben over de natuurkundige begrippen snelheid en versnelling. We stellen dit in deze brugcursus nog even uit tot na de bewegingsvergelijkingen.

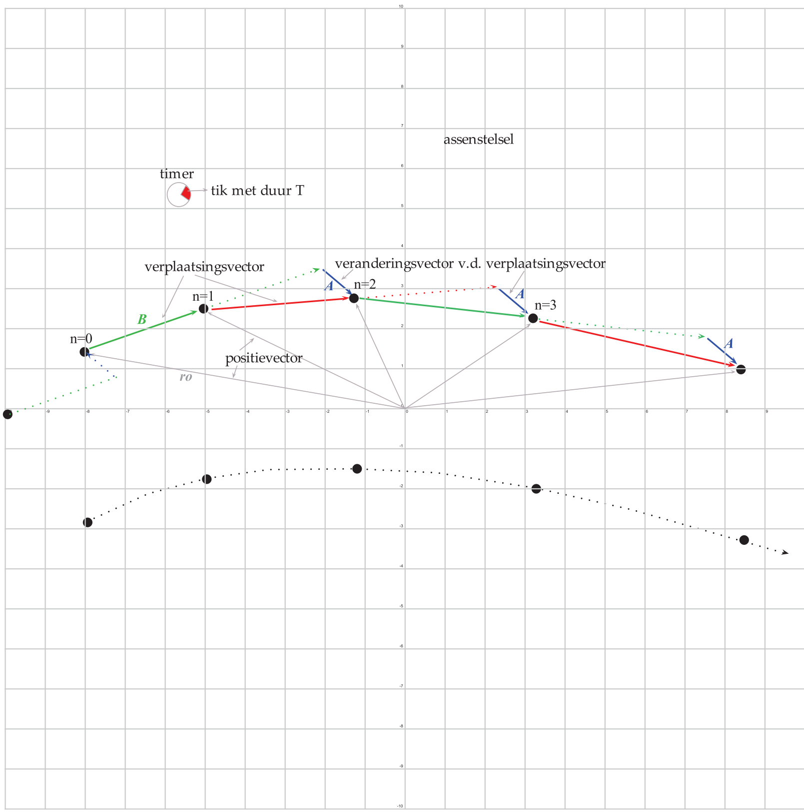
6.1 Afleiding van de bewegingsvergelijking

We keren terug naar het bewegingsdiagram uit Figuur 11. Merk op de dat we het bewegingspatroon met constante veranderingsvectoren van de verplaatsingsvectoren beschouwen. Het doel is om een formule op de stellen die toelaat om de positievectoren uit te rekenen als functie van het tijdsverloop sinds de initiële positie die we beschouwen.

We geven elke positie van het stoffelijk punt een tijdsindex: 0 voor de initieel beschouwde positie (de nulde tik), 1 voor de eerste positie bij de eerste tik, 2 voor de

In Tabel 5 drukken we de verplaatsingsvectoren en de positievectoren uit in termen van de initiële positievector is $\overrightarrow{r_0}$, de initiële verplaatsingsvector is $\overrightarrow{B}$ en de constante verandering van de verplaatsingsvector $\overrightarrow{A}$.

Fig. 23: bewegingsdiagram voor de afleiding van de bewegingsvergelijking. De tiktijdsinterval is T, de initiële positievector is $\overrightarrow{r_0}$, de initiële verplaatsingsvector is de vector $\overrightarrow{B}$ en de constante verandering van de verplaatsingsvector is de vector $\overrightarrow{A}$.



Tab. 5: berekening van de positievector uit het bewegingdiagram van Figuur 23

tijdsindex n	verplaatsingsvector t.o.v. positie $n-1$:	positievector n
	aantal $\overrightarrow{B}$, aantal $\overrightarrow{A}$	aantal $\overrightarrow{r_0}$, aantal $\overrightarrow{B}$, aantal $\overrightarrow{A}$
0		1 , 0 , 0
	1 , 0	
1		1 , 0+1 , 0+0
	1 , 1	
2		1, 0+1+1 , 0+0+1
	1 , 2	
3		1 , 0+1+1+1 , 0+0+1+2
	1 , 3	
4		1 , 0+1+1+1+1 , 0+0+1+2+3
	1 , 4	
5		1 , 0+1+1+1+1+1 , 0+0+1+2+3+4
...		
	1 , n-1	
n		1 , n, 1+2+3+...+(n-1) $= \overrightarrow{r_0} + n\overrightarrow{B} + \frac{n(n-1)}{2}\overrightarrow{A}$

We bekomen dan een formule voor de positievector voor iedere waarde van de tijdsindex, nl. $\overrightarrow{r_0} + n\overrightarrow{B} + \frac{n(n-1)}{2}\overrightarrow{A}$.

De tijdsindex is een maat voor het beschouwde tijdstip waarop de positie wordt gemeten, dus de tijdstippen zijn dan $t = t_0 + n.T$. De tijdsindex n is dus: $n = \frac{t-t_0}{T}$. Als we n dan vervangen in $\overrightarrow{r_0} + n\overrightarrow{B} + \frac{n(n-1)}{2}\overrightarrow{A}$ dan bekomen we de **bewegingsvergelijking**:

Voor de bewegingspatronen met constante veranderingsvector van de verplaatsingsvector (eenparige versnelde rechtlijnige beweging en projectielbeweging)

$$\overrightarrow{r}(t) = \overrightarrow{r}(t_0) + \left(\frac{\overrightarrow{B}}{T} - \frac{1}{2}\frac{\overrightarrow{A}}{T}\right)(t-t_0) + \frac{1}{2}\frac{\overrightarrow{A}}{T^2}(t-t_0)^2 \tag{1}$$

met de **versnellingsvector** $\overrightarrow{a}$ gedefinieerd als:

$$\overrightarrow{a} \equiv \frac{\overrightarrow{A}}{T^2} \tag{2}$$

Maak als concrete toepassing van deze vergelijking Oefening 8.1.2 aan het einde van dit deel.

6.2 Interpreteren van de bewegingsvergelijking

Zoals je in de Oefening 8.1.2 hebt opgemerkt, herleidt de bewegingsvergelijking 1 zich in het geval van een vlakke beweging waarbij de veranderingsvector van de verplaatsingsvector constant is, tot een stel van 2 vergelijkingen van de vorm:

$$x(t) = x_0 + getal1.(t-t_0) + \frac{1}{2}getal2.(t-t_0)^2 \tag{3}$$

$$y(t) = y_0 + getal3.(t-t_0) + \frac{1}{2}getal4.(t-t_0)^2 \tag{4}$$

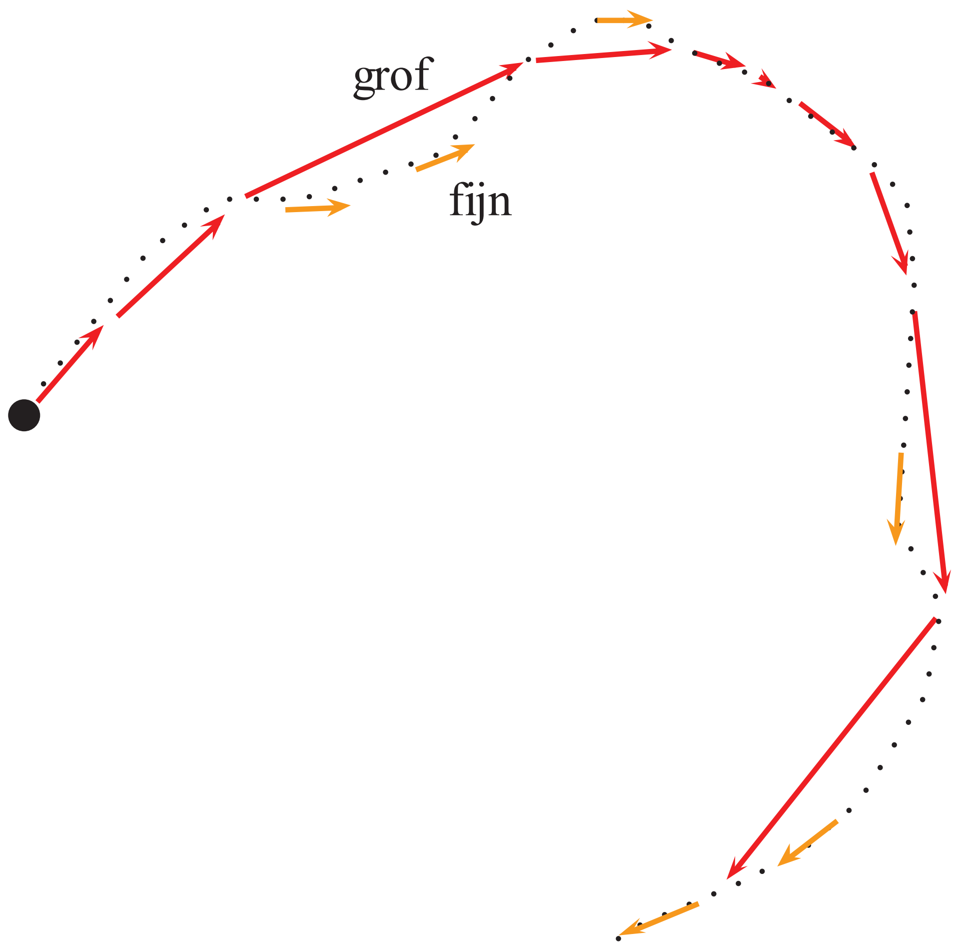
In Oefening 8.1.2 vonden we $x(t) = t\ (m)$ en $y(t) = 1 + 3,5t - 5t^2\ (m)$ m.a.w. $getal1 = 1\,\mathrm{m/s}$, $getal2 = 0\,\mathrm{m/s^2}$, $getal3 = 3,5\,\mathrm{m/s}$ en $getal4 = -10\,\mathrm{m/s^2}$. Verklaar de eenheden! De versnellingsvector is dus $\overrightarrow{a} = (0,-10)\,\mathrm{m/s^2}$. De versnellingsvector in dit geval duidt aan dat de verplaatstingsvector verandert in de vertikale richting van de y-as en met de zin tegengesteld aan de zin van de y-as.

De bewegingsvergelijking kan je op verschillende manieren bekijken, en dit is nuttig bij het oplossen van vraagstukken. Hierna gaan we hier verder in op vraagstukken oplossen.

6.3 Het natuurkundig begrip snelheid

Zoals we hebben gezien kan de verplaatsingsvector van het ene tiktijdsinterval naar het volgende veranderen. Met andere woorden zowel de richting als de grootte van de verplaatsingsvector kan veranderen gedurende de beweging. Om in detail weer te geven welke

Fig. 24: om in detail weer te geven welke richting en zin de beweging heeft, moeten we kijken naar de verplaatsingsvektor in zeer korte tijdsintervallen



richting en zin de beweging heeft, moeten we kijken naar de veroplaatsingsvektor in zeer korte tijdsintervallen, zie Figuur 24

Om de snelheidsvektor te berekenen moeten we dus de verplaatsingsvektor in een tijdsinterval delen door de duur van het tijdsinterval, en het tijdsinterval zo fijn mogelijk nemen. We doen dit in de Oefening 8.1.3

7 Vraagstukken oplossen

We beperken ons tot bewegingspatronen met constante versnellingsvector $\overrightarrow{a}$. De bewegingsvergelijking en de snelheidsvergelijking kunnen we schrijven als:

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_0} + \overrightarrow{v_0}(t - t_0) + \frac{1}{2}\overrightarrow{a}(t - t_0)^2$$

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_0} + \overrightarrow{a}(t - t_0)$$

De bewegingsvergelijking en de snelheidsvergelijking leggen een verband tussen 3 vectoren $\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}$, $\overrightarrow{v} - \overrightarrow{v_0}$, $\overrightarrow{a}$ en een tijdsinterval $t - t_0$. Aangezien vectoren telkens 2 componenten hebben in het vlak, hebben we in totaal dus 7 grootheden, voor een stelsel van 4 vergelijkingen (vectorvergelijkingen ontbinden in telkens 2 componenten). Er moeten dus steeds 3 grootheden bekend zijn en/of gekozen worden opdat het stelsel volledig bepaald zou zijn.

Afhankelijk van de grootheden die (rechtstreeks of onrechtreeks) gekend en/of gekozen zijn, kan je andere grootheden d.m.v. deze vergelijkingen proberen te berekenen. Dit leidt tot een enkele typische soorten vraagstukken, zie Tabel 6

Tab. 6: types vaak voorkomende vraagstukken

type vraagstuk	gekend en/of keuze	op te lossen	voorbeeld
I	$\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}$, $\overrightarrow{a}$	$\overrightarrow{v} - \overrightarrow{v_0}$, $t - t_0$	eindsnelheid+valtijd bij vrije val geg. hoogte+valversnelling
II	$\overrightarrow{v} - \overrightarrow{v_0}$, $\overrightarrow{a}$	$\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}$, $t - t_0$	remweg+remtijd auto geg. beginsnelheid+remvertraging

8 Oefeningen

8.1 bewegingsvergelijking

8.1.1 Stel een formule op voor de som van de eerste n natuurlijke getallen.

Noteer de som als volgt: $S_n = 0 + 1 + 2 + 3 + ... + n$. Dan hebben we:

$S_0 = 0$; $S_1 = 0+1 = 1$; $S_2 = 0+1+2 = 3$; $S_3 = 0+1+2+3 = 6$; $S_4 = 0+1+2+3+4 = 10$ enz. Hoe kunnen we een formule bekomen voor een willekeurige waarde van n?

Truukje: schrijf eerst S_n uit en daaronder S_{n-1}in omgekeerde volgorde:

$S_n = 0 + 1 + 2 + 3 + ... + (n-2) + (n-1) + n$, dit zijn $(n+1)$ termen

$S_{n-1} = (n-1) + (n-2) + ... + 2 + 1 + 0$, dit zijn n termen

Tab. 7: formule opstellen voor de som van de eerste n natuurlijke getallen

$S_n =$	0	$+1$	$+2$	$+3$	$+...$	$+(n-2)$	$+(n-1)$	$+n$
$S_{n-1} =$		$(n-1)$	$+(n-2)$	$+(n-3)$	$+...$	$+2$	$+1$	$+0$
$S_n + S_{n-1} =$		$(1+n-1)$	$(2+n-2)$	$(3+n-3)$	$+...$	$(n-2+2)$	$(n-1+1)$	$n+0$
		n	n	n	$+...$	n	n	n

Bij het optellen van S_n en S_{n-1} krijg je dus n termen waarbij elke term gelijk aan n is. Dus:

$S_n + S_{n-1} = n^2$. Dit is een vergelijking met 2 onbekenden. Kan je nog een andere vergelijking maken met die 2 onbekenden? Ja, want $S_n = S_{n-1} + n$ (per definitie). Oplossen van dit stelsel met 2 vergelijkingen met 2 onbekenden geeft: $S_n + S_{n-1} = 2S_{n-1} + n$ en dus we hebben als oplossing vor S_{n-1}: $2S_{n-1} + n = n^2$. Daaruit volgt: $2S_{n-1} = n^2 - n = n(n-1)$ en dan heb je ook de algemene formule voor de som van de eerste n natuurlijke getallen:

$$\boxed{S_n = 0 + 1 + 2 + ... + (n-1) + n = \tfrac{n(n+1)}{2}}$$

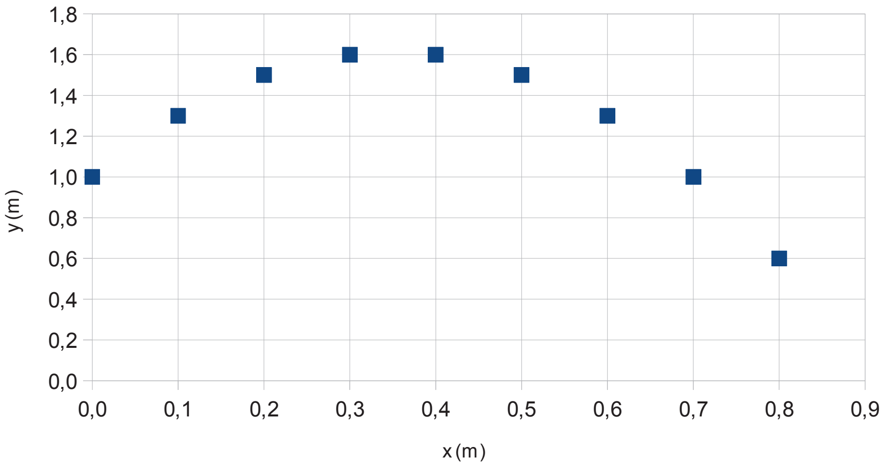
Deze formule moet je niet uit het hoofd leren. Ze is bruikbaar voor het opstellen van de bewegingsvergelijking, zie Tabel 5.

8.1.2 Een tennisbal wordt gelanceerd op een hoogte van $1\,m$ boven de grond. De initiële verplaatsingsvector is $\overrightarrow{B} = (0,1; 0,3)\,m$, de veranderingsvector van de verplaatsingsvector is de constante vector $\overrightarrow{A} = (0; -0,1)\,m$ bij een motion capture opname van de beweging met een tiktijdsinterval van $T = 0,1\,s$. (1) Maak een schets van het bewegingsdiagram. (2) Schrijf de bewegingsvergelijking. (3) Schets gedetailleerde grafieken van de positiecoördinaten als functies van de tijd. (4) Bereken de positievector van de tennisbal na $0,45\,s$ en na $0,85\,s$. (5) Voorspel op welk ogenblik de bal de grond zal raken.

Oplossing:

1. Bewegingsdiagram zie Figuur 25 en zie Tabel 8
2. De bewegingsvergelijking 1 wordt met de keuze $t_0 = 0\,s$: $x(t) = t\ (m)$ en $y(t) = 1 + 3,5t - 5t^2\ (m)$
3. Grafiek van een 1e graadsfunctie en van een 2e graadsfunctie van de tijd in Figuur 26
4. op $t = 0,45\,s$: $\overrightarrow{r_{0,45}} = \left(0,45; 1 + 3,5.0,45 - 5.0,45^2\right) = (0,45; 1,56)\ (m)$; op $t = 0,85\,s$: $(0,85; 0,36)\ (m)$
5. $0 = 1 + 3,5t_{gr} - 5t_{gr}^2$: 2egraadsvergelijking oplossen. $t_{gr} = \frac{-3,5-\sqrt{3,5^2-4.(-5).1}}{2.(-5)} = 0,92\,s$ of $t_{gr} = \frac{-3,5+\sqrt{3,5^2-4.(-5).1}}{2.(-5)} = -0,22\,s$. 2e oplossing ongeldig want we zoeken oplossingen met $t \geq 0$.

Fig. 25: bewegingsdiagram uit Oefening8.1.2

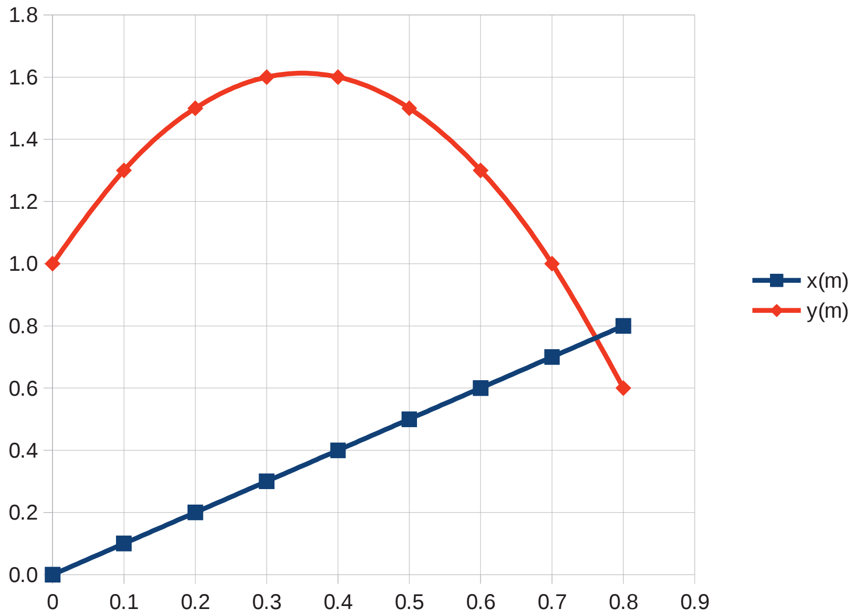


8.1.3 Leid de vergelijking voor de snelheidsvektor als functie van de tijd af voor bewegingspatronen met constante versnellingsvector.

Zie Figuur 27

$\overrightarrow{r_1} = \overrightarrow{r_0} + \overrightarrow{v_0}(t_1 - t_0) + \frac{1}{2}\overrightarrow{a}(t_1 - t_0)^2$ waarbij we $\frac{\overrightarrow{B}}{T} - \frac{1}{2}\frac{\overrightarrow{A}}{T} = \overrightarrow{v_0}$ gesteld hebben in de bewegingsvergelijking 1

Fig. 26: positiecoördinaten uit Oefening 8.1.2 als functies van de tijd grafisch weergeven



Tab. 8: getalwaarden voor de componenten van de positievectoren, verplaatsingsvectoren en verandersingsvectoren van de verplaatsingsvectoren uit Oefening 8.1.2

t(s)	x(m)	y(m)	Δx(m)	Δy(m)	Δ(Δx)(m)	Δ(Δy)(m)
0	0,0	1,0				
			0,1	0,3		
0,1	0,1	1,3			0	-0,1
			0,1	0,2		
0,2	0,2	1,5			0	-0,1
			0,1	0,1		
0,3	0,3	1,6			0	-0,1
			0,1	0		
0,4	0,4	1,6			0	-0,1
			0,1	-0,1		
0,5	0,5	1,5			0	-0,1
			0,1	-0,2		
0,6	0,6	1,3			0	-0,1
			0,1	-0,3		
0,7	0,7	1,0			0	-0,1
			0,1	-0,4		
0,8	0,8	0,6			0	-0,1

$\overrightarrow{r_2} = \overrightarrow{r_0} + \overrightarrow{v_0}(t_2 - t_0) + \frac{1}{2}\overrightarrow{a}(t_2 - t_0)^2$

$\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1} = \overrightarrow{v_0}(t_2 - t_1) + \frac{1}{2}\overrightarrow{a}\left[(t_2 - t_0)^2 - (t_1 - t_0)^2\right] = \overrightarrow{v_0}(t_2 - t_1) + \frac{1}{2}\overrightarrow{a}(t_2 - t_1)(t_2 + t_1 - 2t_0)$

$\frac{\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}}{t_2 - t_1} = \overrightarrow{v_0} + \frac{1}{2}\overrightarrow{a}(t_2 + t_1 - 2t_0) = \overrightarrow{v_0} + \overrightarrow{a}\left(\frac{t_2 + t_1}{2} - t_0\right)$

Dus als je het tijdsinterval heel kort neemt (fijn!) dan zijn $t_2$en $t_1$quasi aan elkaar gelijk. Noem ze allebei gewoon t. Dan krijg je de snelheidsformule:

$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_0} + \overrightarrow{a}(t - t_0)$ waarbij we gesteld hebben dat $\frac{\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}}{t_2 - t_1} = \overrightarrow{v}$

8.2 Vraagstukken

8.2.1 Een auto rijdt met snelheid $50\,\mathrm{km/h}$. Veronderstel dat zijn remvertraging $0,6\,\mathrm{m/s^2}$ bedraagt, bereken dan (1) de remtijd en (2) de remafstand.

8.2.2 Herneem Oefening 8.1.2 en bereken (1) de maximale hoogte die de tennisbal bereikt, en (2) de tijd om die hoogte te bereiken.

8.2.3 Lucas komt elke dag van zijn werk aan om 17u in het station. Zijn vrouw zorgt er steeds voor dat ze stipt op dat moment met de auto bij het staion aankomt. Lucas stapt snel in en ze rijden samen, gezellig naar huis. Op zekere dag komt Luca echter om 16u30 aan, zijn vrouw is niet op de hoogte. Hij besluit naar huis te wandelen. Na enige tijd komt hij zijn vrouw tegen, die op weg is naar het station. Lucas stapt snel in en samen rijden ze naar huis. Nu blijkt dat ze 10 minuten eerder thuis zijn dan gewoonlijk. Hoe lang heeft Lucas gewandeld?

Fig. 27: afleiding van de snelheidsvergelijking