Oefeningen Mechanica
2de Kandidatuur Wiskunde-Natuurkunde

Paul Koerber
koerber@tena4.vub.ac.be

17 februari 2004

1 Verbindingen en de lagrangiaan

1.1 Theorie

- Holonome verbindingen

  Type:

  $$f_i(\bar{r}^k, t) = 0, \qquad i = 1, \ldots, r\,. \tag{1}$$

  Deze voorwaarden laten van de oorspronkelijke $3n$ slechts $3n - r$ vrijheidsgraden over. We voeren nieuwe coördinaten q^l (met $l = 1, \ldots 3n - r$) in, zodat $\bar{r}^k(q, t)$[1] de vergelijkingen (1) triviaal oplost d.w.z.

  $$f_i(\bar{r}^k(q, t), t) \equiv 0, \qquad i = 1, \ldots, r\,. \tag{2}$$

  Dit noemt men de verbindingen vrijmaken.

- Niet-holonome verbindingen

  Alle andere:

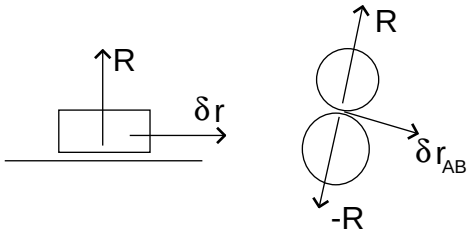
  - met ongelijkheden: bv. $f(x, y, z) > 0$
  - met differentiaalvergelijkingen: bv. rollend wiel

- Ideale verbindingen leveren geen arbeid bij een (virtuele) verplaatsing die door de verbinding wordt toegelaten. In de methode van de virtuele arbeid die we gebruiken om de Euler-Lagrange vergelijkingen zijn we dus van de verbindingskrachten af !

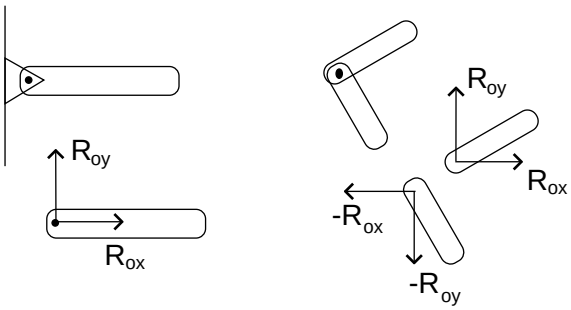
[1] Met $f(q, \ldots)$ wordt vanaf nu bedoeld dat f afhankelijk kan zijn van alle q^l, de index wordt dus niet expliciet aangegeven.

Voorbeelden:

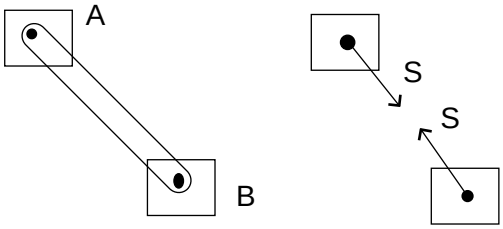
- vrij contact



- scharnier



- staaf/koord



- Uit de wetten van Newton

$$m_i \ddot{\bar{r}}^i = \bar{F}^i, \qquad i = 1, \ldots, n\,, \tag{3}$$

kunnen via de methode van de virtuele arbeid de Euler-Lagrange vergelijkingen afgeleid worden:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^j} = Q_j \qquad j = 1, \ldots 3n - r\,, \tag{4}$$

waarbij $L = T - V$ de lagrangiaan is en

$$Q_j^{\mathrm{NC}} = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}^{\mathrm{NC,i}} \cdot \frac{\partial \bar{r}^i}{\partial q^j}\,, \tag{5}$$

is de bijdrage van de niet-conservatieve krachten. De kinetische energie wordt gegeven door

$$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \bar{v}^i \cdot \bar{v}^i \,, \tag{6}$$

met[2]

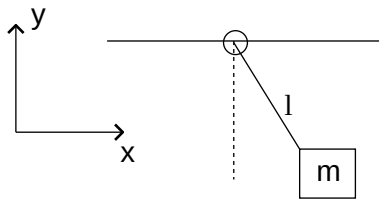
$$\bar{v}^i = \dot{\bar{r}}^i = \frac{\partial \bar{r}^i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{r}^i}{\partial q^j} \dot{q}^j \,, \tag{7}$$

en V is de potentiële energie voor *alle* conservatieve krachten.

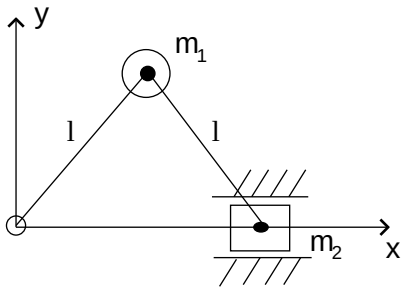
1.2 Opgaven

Zoek voor de volgende systemen de verbindingsvergelijkingen en tracht veralgemeende coördinaten q_l te vinden die deze identiek oplossen. Veronderstel dat het systeem verticaal staat. Zoek de kinetische energie $T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\bar{r}}_i^2$ en de potenentiële energie V van de zwaartekracht. Bereken de lagrangiaan L en stel de Euler-Lagrange vergelijkingen op en los op indien mogelijk.

1.

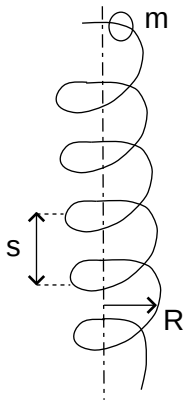


2.



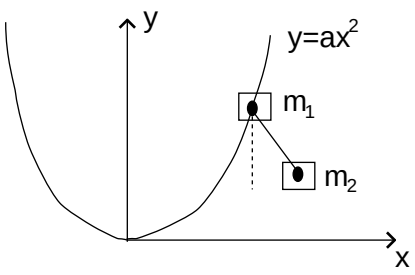
3.

[2]In onderstaande formule en in de rest van deze bundel wordt de Einstein sommatieconventie gebruikt d.w.z. dat gesommeerd moet worden over alle indices die twee maal voorkomen waarvan één keer bovenaan (contravariant) en één keer onderaan (covariant).



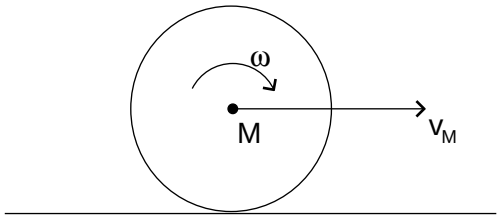
Zoek de „effectieve" valversnelling. Kijk naar de limieten voor $R \ll s$ en $R \gg s$.

4.



In plaats van de volledige Euler-Lagrange vergl. op te lossen mag je je hier beperken tot het zoeken van de evenwichtsconfiguratie.

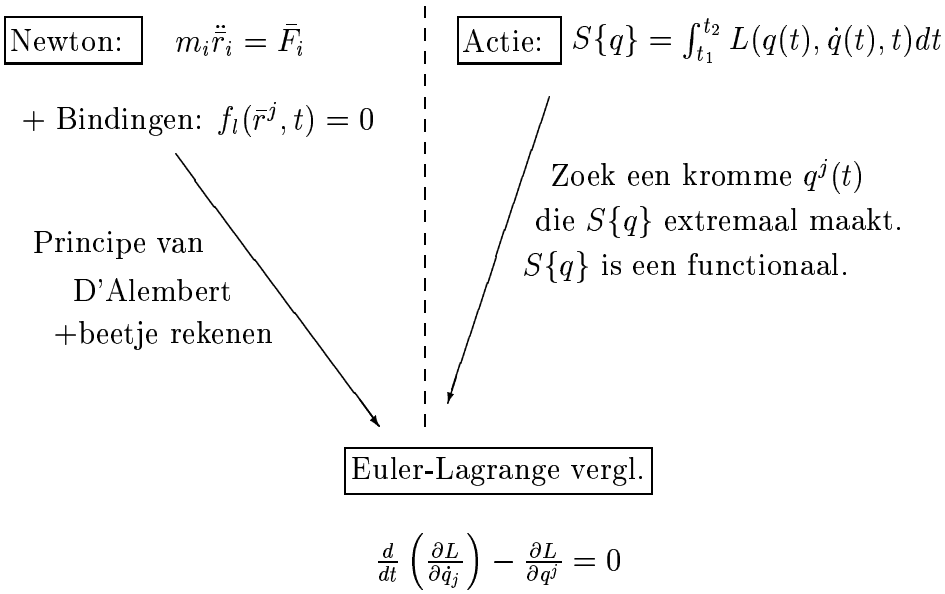
5.



Let op: het wiel mag niet slippen !

2 De Euler-Lagrange vergelijkingen

2.1 Theorie



Wat is er fundamenteel: de vergelijkingen van Newton of de actie $S\{q\}$? Het actieprincipe heeft allerlei voordelen:

- De aanpak is eleganter, zeker als er ook verbindingen in het spel zijn.
- Symmetrieën zijn duidelijker zichtbaar: zie één van de volgende lessen.
- Het actieprincipe beperkt zich niet tot mechanica. Ook in andere takken van de fysica kan men een actie neerschrijven.
- In moderne quantumveldentheorieën staat de actie centraal. Voor gewone quantummechanica hebben we dan weer de hamiltoniaan nodig. In één van de volgende oefenzitting zullen we zien hoe we die afleiden uit de lagrangiaan.

2.2 Opgaven

1. Zoek de lagrangiaan en de Euler-Lagrange vergl. voor een harmonische oscillator. Wat verandert er als de oscillator verticaal hangt ?
2. Beschouw een punttransformatie $Q^j = Q^j(q, t)$ met inverse $q^i = q^i(Q, t)$. Toon aan dat het linkerlid van de Euler-Lagrange vergl. transformeert als een covariante vector.

Geheugenopfrissing: $A_j(q)$ is een covariante en B^j een contravariante vector op voorwaarde dat ze als volgt transformeren onder een coördinatentransformatie $Q^k = Q^k(q)$ met inverse $q^l = q^l(Q)$:

$$\begin{aligned} A'_j(Q) &= A_k(q(Q)) \frac{\partial q^k(Q)}{\partial Q^j} \\ B'^j(Q) &= B^k(q(Q)) \left. \frac{\partial Q^j(q)}{\partial q^k} \right|_{q=q(Q)} \end{aligned} \tag{8}$$

Merk op dat het gebruik van benedenindices voor covariante vectoren en bovenindices voor contravariante tensors compatibel is met de Einstein sommatieconventie. Ook werd hier moeite gedaan om expliciet aan te geven wat precies functie is van wat. Uiteraard zal dat om de notatie niet te overladen niet lang volgehouden worden.

Hints:

- Tussen de krommen $q(t)$ en $Q(t)$ (oplossingen in de beide coördinatenstelsels) bestaat het volgende verband:

$$q(t) = q(Q(t), t), \qquad \forall t\,. \tag{9}$$

  Zoek nu $\dot{q}(t)$ in functie van $Q(t)$, $\dot{Q}(t)$ en t. Leid hieruit af dat:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{q}^i(Q(t), \dot{Q}(t), t)}{\partial \dot{Q}^k} &= \frac{\partial q^i(Q(t), t)}{Q^k} \\ \frac{\partial \dot{q}^i(Q(t), \dot{Q}(t), t)}{\partial Q^l} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q^i(Q(t), t)}{Q^l}\right)\,. \end{aligned} \tag{10}$$

- Stel $L'(Q, \dot{Q}, t) = L(q(Q, t), \dot{q}(Q, \dot{Q}, t), t)$.
  Zoek nu $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_j}\right) - \frac{\partial L'}{\partial Q^j}$.

3. (a) Zoek de kortste afstand tussen 2 punten:

$$S\{y\} = \int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx\,. \tag{11}$$

   (b) Zoek het *minimum surface of revolution*:

$$S\{y\} = \int 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx\,. \tag{12}$$

2.3 Opfrissing: oplossen van differentiaalvergelijkingen

Differentiaalvergelijkingen van eerste orde.

Los de vergelijking op naar $\frac{dy}{dx}$ en hoop dat je iets van de vorm:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{X(x)}{Y(y)}\,, \tag{13}$$

krijgt. De oplossing wordt nu gegeven door:

$$\int Y(y)dy = \int X(x)dx + C\,, \tag{14}$$

met C de integratieconstante. Deze methode heet *scheiden van de veranderlijken* en werd toegepast in oef. 2.3.b.

Lineaire differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten.

Zij $P(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0$ een polynoom van de $n$de graad ($a_n \neq 0$), dan noemt men:

$$P\left(\frac{d}{dx}\right) y = 0\,, \tag{15}$$

een lineaire, homogene differentiaalvergelijking van graad n. Zij heeft n lineair onafhankelijke oplossingen, zodat in de algemene oplossing n integratieconstanten staan. Vermits

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^i e^{\lambda x} = \lambda^i e^{\lambda x}\,, \tag{16}$$

ziet men gemakkelijk in dat die algemene oplossing gegeven wordt door:

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + \cdots C_n e^{\lambda_n x}\,, \tag{17}$$

waarbij de λ_i de n (reële of complexe) oplossingen zijn van $P(\lambda) = 0$.
Speciale gevallen:

- Twee complex toegevoegde nulpunten $a+bi$ en $a-bi$: de lineaire onafhankelijke oplossingen zijn:

$$\begin{aligned} e^{(a+bi)x} &= e^a(\cos bx + i\sin bx) \\ e^{(a-bi)x} &= e^a(\cos bx - i\sin bx) \end{aligned} \tag{18}$$

  Merk op dat we in dit geval beter voor de lineaire combinaties $e^a\cos bx$ en $e^a\sin bx$ kiezen als oplossingen van de differentiaalvergelijking.

  Dit is een goede plaats om op te merken dat $\cos x$ en $\sin x$ in feite gedefinieerd kunnen worden als de oplossingen van de differentiaalvergelijking:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0\,, \tag{19}$$

met beginvoorwaarden $y(0) = 1, \dot{y}(0) = 0$ voor $\cos x$ en $y(0) = 0, \dot{y}(0) = 1$ voor $\sin x$. De „complexe varianten" $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ en $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ zijn opl. van

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0\,, \tag{20}$$

met dezelfde beginvoorwaarden. Het definiëren van functies als oplossingen van differentiaalvergelijking is een veelvoorkomende praktijk. Een ander voorbeeld zijn de Besselfuncties $J_p(x)$ en $Y_p(x)$ (van de eerste en de tweede soort), die gedefinieerd zijn als de oplossingen van de differentiaalvergelijking:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - p^2)y = 0\,, \tag{21}$$

die voldoen aan bepaalde voorwaarden.

- meervoudige nulpunten λ_i: nu zijn de lineair onafhankelijke oplossingen van de vorm:

$$e^{\lambda_i x}, xe^{\lambda_i x}, \ldots, x^{m-1}e^{\lambda_i x}\,, \tag{22}$$

waarbij m de multipliciteit van het nulpunt is.

Voor een niet-homogene differentiaalvergelijking $P(\frac{d}{dx})y = f$ tel je bij de meest algemene oplossing van de homogene differentiaalvergelijking een willekeurige particuliere oplossing op. In deze cursus is het rechterlid dikwijls een constante $f(x) = f_0$, zodanig dat we de volgende particuliere oplossing kunnen gebruiken:

$$y_p(x) = \frac{f_0}{a_0}\,. \tag{23}$$

3 Symmetrieën en behouden grootheden

3.1 Theorie

De stelling van Noether

Beschouwen we een infinitesimale transformatie[3]:

$$\left.\begin{array}{rl} q'^i & = q^i + \epsilon\xi^i(t,q) \\ t' & = t \end{array}\right\} \Rightarrow \dot{q}'^i = \dot{q}^i + \epsilon\dot{\xi}^i(t,q,\dot{q})\,, \tag{24}$$

waarbij ϵ een infinitesimale parameter is, dan wordt de lagrangiaan in functie van de nieuwe coördinaten en tot op eerste orde in ϵ:

$$L(q',\dot{q}',t) = L(q,\dot{q},t) + \epsilon\xi^i\frac{\partial L}{\partial q^i} + \epsilon\dot{\xi}^i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\,. \tag{25}$$

Je ziet dat deze transformatie een symmetrie is als en slechts als

$$\xi^i\frac{\partial L}{\partial q^i} + \dot{\xi}^i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = \dot{f}\,, \qquad \forall q^i, \dot{q}^i, t\,, \tag{26}$$

voor een zekere functie $f(q,t)$. Inderdaad, met het integraalprincipe van Hamilton in je achterhoofd, kan je gemakkelijk inzien dat je bij de lagrangiaan een totale afgeleide naar de tijd mag optellen, zonder dat de Euler-Lagrange vergelijkingen veranderen.

Vergelijking (26) moet gelden $\forall q^i, \dot{q}^i, t$ (beschouwd als onafhankelijke variabelen). Bewegen we daarentegen op een baan $(q^i(t))$, zodat de Euler-Lagrange vergelijkingen gelden (in dat geval is $q^i(t)$ een zekere functie en $\dot{q}^i(t)$ de afgeleide ervan, zodanig dat we hier hoegenaamd niet meer met onafhankelijke variabelen hebben te maken), dan volgt:

$$\frac{d}{dt}\left(\xi^i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - f\right) = 0 \qquad \text{op oplossingen } q^i(t) \text{ van de E.L.-vgl.} \tag{27}$$

We hebben dus een constante van de beweging gevonden !

3.2 Opgaven

1. Als L niet expliciet van de tijd afhankelijk is, d.w.z. $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, toon aan dat $H = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i - L$ een constante van de beweging is. Zij is de constante van de

[3]Merk op dat we de tijd niet transformeren. Dat is normaal ook mogelijk, maar alle afleidingen die volgen worden dan wat ingewikkelder. Verder is het niet echt een beperking als we toelaten dat de ξ^i ook van de $\dot{q}^i$ afhankelijk kunnen zijn. Transformeren we namelijk de tijd volgens $t' = t + \epsilon\tau$, dan kan men aantonen dat als (ξ^i, τ) een symmetrie is, dan ook $(\xi^i + \dot{q}^i\Delta\tau, \tau + \Delta\tau)$ en dat beide bovendien aanleiding geven tot dezelfde behouden grootheid. Neem dan $\Delta\tau = -\tau$.

beweging die hoort bij $\xi^i = \dot{q}^i$ (zie ook voetnoot 3). Toon ook dit aan. H is de *energie*. Een meer tot verbeelding sprekende parafrasering van wat je net bewezen hebt is: als de wetten van de natuur niet veranderen ($\frac{\partial L}{\partial t} = 0$), dan is er behoud van energie.

2. Beschouw een lagrangiaan waarvoor geldt: $\frac{\partial L}{\partial q^i} = 0$. Zoek een gepaste symmetrietransformatie en zoek de constante van de beweging. In dit geval spreekt men van een *cyclische coördinaat*.

3. Beschouw de beweging van een deeltje onder invloed van een conservatief krachtveld dat invariant is onder rotatie om de z-as:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(u, z) \qquad u = x^2 + y^2 \,. \tag{28}$$

Toon aan dat L inderdaad invariant is onder:

$$\begin{aligned} x' &= \cos\theta\, x + \sin\theta\, y \\ y' &= -\sin\theta\, x + \cos\theta\, y \\ z' &= z \end{aligned} \tag{29}$$

Hoe ziet de infinitesimale transformatie eruit ? Gebruik de stelling van Noether om de overeenkomstige behouden grootheid te vinden. Wat gebeurt er als de potentiaal van de vorm $V(r)$ is met $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$?

4. *Zoek alle symmetriën van de vorm (24) voor de harmonische oscillator lagrangiaan:

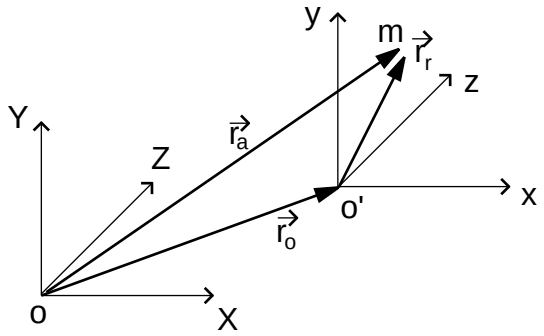
$$L = \frac{1}{2}\left(m\dot{q}^2 - kq^2\right) \,. \tag{30}$$

Merk op dat we hier de tijdstransformaties (of equivalent de snelheidsafhankelijke transformaties: $\xi^i = \xi^i(q, \dot{q}, t)$) buiten beschouwing laten; die zouden nog 3 extra symmetrieën opleveren waaronder de symmetrie uit oef. 1.

4 De relatieve beweging

4.1 Theorie

Beschouw twee assenstelsels $oXYZ$ en $o'xyz$. De positie en beweging van $o'xyz$ t.o.v. $OXYZ$ wordt beschreven door $\bar{r}_0(t)$ en $\bar{\omega}(t)$, respectievelijk de positie van de oorsprong o' in assenstelsel $oXYZ$ en de ogenblikkelijke rotatiesnelheid. Dit laatste begrip mag je als volgt bekijken: als je een vector $\bar{t}$ neemt die in assenstelsel $o'xyz$ *niet* beweegt, dan krijgt deze in assenstelsel $oXYZ$ de snelheid $\bar{\omega} \times \bar{t}$.

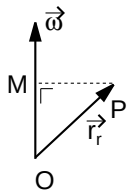


Voor een puntmassa m geldt:

$$\begin{aligned}
&\bar{r}_a = \bar{r}_0 + \bar{r}_r \\
\Rightarrow\ &\bar{v}_a = \frac{d\bar{r}_a}{dt} = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}_r + \bar{v}_r \\
\Rightarrow\ &\bar{a}_a = \frac{d\bar{v}_a}{dt} = \bar{a}_0 + \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r}_r + \bar{\omega} \times \bar{v}_r + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_r) + \bar{\omega} \times \bar{v}_r + \bar{a}_r \\
&\qquad = \bar{a}_0 + \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r}_r - \overline{MP}\omega^2 + 2\,\bar{\omega} \times \bar{v}_r + \bar{a}_r\,,
\end{aligned} \tag{31}$$

waarbij we in de laatste lijn gebruik gemaakt hebben van enige vectoralgebra, nl. $\bar{A} \times (\bar{B} \times \bar{C}) = \bar{B}(\bar{A} \cdot \bar{C}) - \bar{C}(\bar{A} \cdot \bar{B})$:

$$\begin{aligned}
\bar{a}_M = \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_r) &= \bar{\omega}(\bar{\omega} \cdot \bar{r}_r) - \omega^2 \bar{r}_r \\
&= \omega^2(\overline{OM} - (\overline{OM} + \overline{MP})) \\
&= -\omega^2 \overline{MP}\,.
\end{aligned} \tag{32}$$



De term $\bar{a}_M$ is de beruchte middelpuntzoekende versnelling, terwijl $\bar{a}_C = 2\,\omega \times \bar{v}_r$ de Coriolis-versnelling en $\bar{a}_T = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r}_r$ een versnelling tengevolge van de verandering van $\bar{\omega}$ is. Dit laatste kan zowel een verandering van de grootte als van de richting van $\bar{\omega}$ zijn.

We proberen nu de gewijzigde wet van Newton af te leiden in het bewegende assenstelsel $o'xyz$:

$$\begin{aligned} m\bar{a}_r &= m\bar{a}_a - m(\bar{a}_0 + \bar{a}_T + \bar{a}_M + \bar{a}_C) \\ &= \bar{F} - m\bar{a}_{\text{corr}} \\ &= \bar{F} + \bar{F}_T\,, \end{aligned} \tag{33}$$

waarbij $\bar{F}_T$ de traagheidskracht is die moet ingevoerd worden opdat de wet van Newton geldig zou blijven. Wegens het minteken zal dus de *middelpuntzoekende* versnelling aanleiding geven tot een *middelpuntvliedende* traagheidskracht.

Merk op dat $\bar{F}_T$ enkel verschillend van nul zal zijn in versnellende ($\bar{a}_0 \neq 0$) of roterende ($\bar{\omega} \neq 0$) relatieve assenstelsels (of een combinatie van beide). We geven een overzicht van de twee meest voorkomende situaties:

Relatieve beweging	**versnelde translatie**	**constante rotatie**
Rust	$\bar{a}_{\text{corr}} = \bar{a}_0$ $\bar{F}_T = -m\bar{a}_0$	$\bar{a}_{\text{corr}} = \bar{a}_M$ $\bar{F}_T = -m\bar{a}_M$
Beweging $\bar{v}_r \neq 0$	$\bar{a}_{\text{corr}} = \bar{a}_0$ $\bar{F}_T = -m\bar{a}_0$	$\bar{a}_{\text{corr}} = \bar{a}_M + \bar{a}_C$ $\bar{F}_T = -m\bar{a}_M - m\bar{a}_C$

4.2 Opgaven

1. Beschouw een deeltje m op een afstand R van de oorsprong van een schijf die draait met hoeksnelheid ω. Neem een bewegend assenstelsel dat meedraait met de schijf. Wat zijn de traagheidskrachten:

   (a) als m t.o.v. de schijf in rust is.

   (b) als m wegbeweegt van de oorsprong, d.w.z. de relatieve snelheid is evenwijdig met de straal.

   (c) als de relatieve snelheid van m loodrecht staat op de straal.

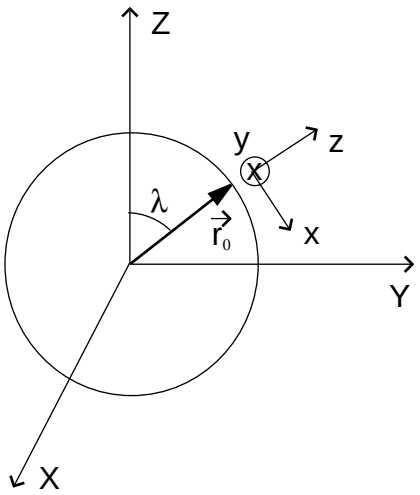
2. Beschouw een deeltje m op het aardoppervlak; de straal van de aarde is 6370 km:

   (a) Wat is de correctie op $\bar{g}$ veroorzaakt door de middelpuntvliedende kracht op onze breedtegraad ($\phi = 50°$) ?

   (b) Bereken de Corioliskracht voor een deeltje dat zich op het noordelijk/zuidelijk halfrond bevindt en zich volgens een meridiaan/breedtecirkel beweegt.

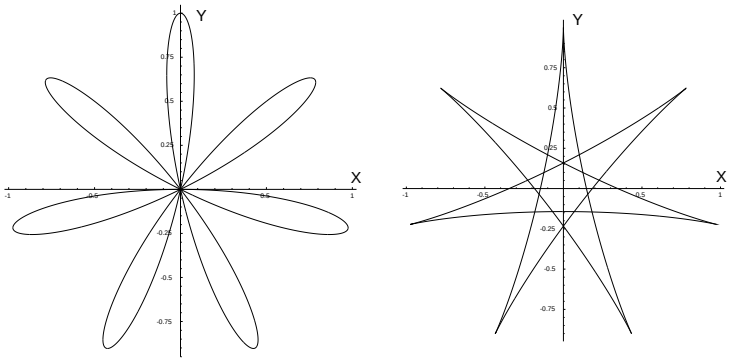
(c) Een vliegtuig beweegt in het noordelijk halfrond volgens een breedtecirkel op een breedte van 50° met een snelheid van 1080 km/h. Indien dit vliegtuig gedurende een uur exact de koers oost-west aanhoudt, over welke afstand zou het dan afgedreven zijn naar het noorden ?

3. Beschouw een slinger met lengte l, opgehangen boven het aardoppervlak op een breedtegraad $\frac{\pi}{2} - \lambda$. Dit noemt men een *slinger van Foucault* naar een beroemd experiment, uitgevoerd door Foucault in het Panthéon in Parijs in 1958. De bedoeling was om op een simpele en rechtstreekse manier aan te tonen dat de aarde draait. We zullen in deze oefening zien hoe de hoeksnelheid van de aarde ervoor zorgt dat het bewegingsvlak van de slinger draait.



- Stel de bewegingsvergelijking op in een assenstelsel met oorsprong op de plaats waar de slinger in rust hangt en meeroterend met de aarde. z-as naar boven, x-as naar het zuiden, y-as naar het oosten (zie figuur). Gebruik de wetten van Newton.
- Hoe groot is de hoeksnelheid ω ? Benader tot op eerste orde in ω.
- Kleine beweging van de slinger: benader ook tot op eerste orde in θ.
- Los de bewegingsvergelijkingen op. De slinger begint in het yz-vlak.

De oplossing ziet er voor $\frac{\omega_s}{\cos\lambda\omega} = 7$, met $\omega_s = \sqrt{\frac{g}{l}}$ als volgt uit in het (x, y)-vlak (met twee verschillende sets beginvoorwaarden):



De cijfergegevens voor de oorspronkelijke slinger van Foucault in het Panthéon:

$$\begin{aligned} l = 67\,\mathrm{m} \Rightarrow \begin{cases} \omega_s &= \sqrt{\frac{g}{l}} = 0,383\,\mathrm{s}^{-1} \\ T_s &= \frac{2\pi}{\omega_s} = 16,4\,\mathrm{s} \\ \frac{\omega_s}{\omega} &= 5260 \end{cases} \\ m = 28\,\mathrm{kg} \\ \theta_{\max} \approx 0,1 \Rightarrow x, y, z_{\max} \approx 7\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{34}$$

4.3 Meer achtergrond en filosofische beschouwingen

De lagrangiaan uit de Newton-mechanica voor N puntdeeltjes:

$$L = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \bar{v}_i^2 + \sum_{i \neq j} V_{ij}(|\bar{r}_i - \bar{r}_j|)\,, \tag{35}$$

waarbij $V_{ij}(r)$ de gravitatiepotentiaal[4] is:

$$V_{ij}(r) = -G\frac{m_i m_j}{r}\,, \tag{36}$$

heeft als symmetrieën de groep van ruimte-tijd transformaties:

$$\begin{aligned} t_i' &= t_i + b \\ \bar{r}_i{}' &= R(\bar{r}_i) + \bar{v}t_i + \bar{a}\,, \end{aligned} \tag{37}$$

waarbij R een rotatie voorstelt. Deze groep heet de *Galileo-groep*. Hij bestaat uit 1 tijdstranslatie (b), 3 ruimtetranslaties ($\bar{a}$), 3 rotaties (R) en 3 zuivere Galileo-transformaties ($\bar{v}$) i.e. een overgang naar een ander assenstelsel dat tegenover het eerste een eenparige rechtlijnige beweging uitvoert. De infinitesimale versies van deze transformaties ervan geven aanleiding tot Noethersymmetrieën zoals gedefinieerd in de vorige oefenzitting en leiden respectievelijk tot de volgende

[4]Of een andere potentiaal waarbij de V enkel afhankelijk is van de afstanden $|r_i - r_j|$.

behouden grootheden: energie, impuls, draaiimpulsmoment en een grootheid die de eenparige translatie van het massamiddelpunt oplegt. Delen daarvan hebben we gecontroleerd in oefeningen 3.1., 3.2. en 3.3.

Nu is een transformatie naar een assenstelsel dat versnelt of roteert tegenover het oorspronkelijke assenstelsel *geen* symmetrie meer. Bijgevolg verandert de wet van Newton van vorm; we moeten traagheidskrachten invoeren.

De enige assenstelsels waarin de wet van Newton behouden blijft zijn assenstelsel die door een Galileo-transformatie met het oorspronkelijke assenstelsel verbonden zijn. Een assenstelsel waarin de wetten van Newton geldig zijn (zonder traagheidskrachten) noemt men een *inertiaalstelsel*. Maar welke zijn nu precies die inertiaalstelsels: het assenstelsel van de aarde, dat van de zon, etc. ? Wat is er absoluut in rust ? Dergelijke overwegingen leidden Newton tot de invoering van het begrip *absolute ruimte*, het assenstelsel dat in rust is. Later werd ook geponeerd dat dit het assenstelsel van de *ether* was, het medium waarin licht golft. Ondertussen weten we dat licht geen medium nodig heeft en dit inzicht leidde tot de *speciale relativiteitstheorie*.

Dergelijke afhankelijkheid van de wetten van de fysica van de keuze van het assenstelsel is echter onbevredigend. Het probleem werd maar volledig opgelost met de *algemene relativiteitstheorie*. In die theorie is de actie invariant onder *algemene coördinatentransformaties*.

4.4 Intermezzo: stelsels van lineaire differentiaalvergelijkingen

- Om een stelsel van lineaire differentiaalvergelijkingen op te lossen, transformeer je het eerst naar een stelsel van 1ste-orde differentiaal vergelijkingen. Dit gebeurt door het invoeren van nieuwe onbekenden. Zo wordt de differentiaalvergelijking

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \cdots + a_0 y = 0\,, \tag{38}$$

door het invoeren van nieuwe onbekenden:

$$\begin{aligned} y_1 &= y \\ y_2 &= \frac{dy}{dx} \\ &\vdots \\ y_n &= \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\,, \end{aligned} \tag{39}$$

omgezet in het stelsel 1ste orde differentiaalvergelijkingen:

$$\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dx} &= y_2 \\
\frac{dy_2}{dx} &= y_3 \\
&\vdots \\
\frac{dy_{n-1}}{dx} &= y_n \\
\frac{dy_n}{dx} &= -\frac{a_{n-1}}{a_n} y_n - \cdots - \frac{a_0}{a_n} y_1 \,.
\end{aligned} \tag{40}$$

- We schrijven het bekomen stelsel als

$$\frac{dy_i}{dx} = A_{ij} y_j \tag{41}$$

of nog korter in matrixnotatie:

$$\frac{dY}{dx} = AX \,, \tag{42}$$

waarbij $Y = (y_i)$ een vector en $A = (a_{ij})$ een matrix is.

De oplossing wordt, naar analogie met het scalaire geval, gegeven door:

$$Y(x) = \exp(Ax) Y_0 \,, \tag{43}$$

waarbij $Y_0 = Y(0)$ de begintoestand is.

Nu moeten we natuurlijk nog betekenis geven aan de matrixexponentiële. We doen dit via de reeksontwikkeling van de exponentiële functie:

$$Y(x) = \exp(Ax) = I + Ax + \frac{1}{2} A^2 x^2 + \frac{1}{6} A^3 x^3 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i x^i}{i!} \,. \tag{44}$$

Hiermee zien we onmiddellijk dat voldaan is aan (42).

Om deze oplossing concreet uit te rekenen is het best om de matrix A te diagonaliseren:

$$A = S \Delta S^{-1} \,, \tag{45}$$

met Δ een diagonaalmatrix. Men ziet dan onmiddellijk, gebruikmakende van (44), dat:

$$\exp(Ax) = S \exp(\Delta x) S^{-1} \,, \tag{46}$$

waarbij men $\exp(\Delta x)$ bekomt door gewoon de exponentiële te nemen van de diagonaalelementen: $\exp(\Delta_{ii} x)$.

5 Tweedeeltjesprobleem en Kepler-probleem

5.1 Theorie

Beschouw twee deeltjes met massa m_1 en m_2 en coördinaten $\bar{r}_1$ en $\bar{r}_2$, die gehoorzamen aan de lagrangiaan[5]:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_1\dot{\bar{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\bar{r}}_2^2 - V(|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|)\,. \tag{47}$$

Door over te stappen op nieuwe coördinaten, nl.

$$\begin{aligned} \bar{r} &= \bar{r}_1 - \bar{r}_2 \\ \bar{R} &= \frac{m_1\bar{r}_1 + m_2\bar{r}_2}{m_1 + m_2}\,, \end{aligned} \tag{48}$$

waarbij $\bar{r}$ de *relatieve positie* en $\bar{R}$ de positie van het *massamiddelpunt* is, kan men de beweging opsplitsen in 2 onafhankelijke componenten:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2\,, \\ \text{met} \quad \mathcal{L}_1 &= \frac{1}{2}M\dot{\bar{R}}^2 \\ \mathcal{L}_2 &= \frac{1}{2}m\dot{\bar{r}}^2 - V(r)\,, \end{aligned} \tag{49}$$

waarbij $M = m_1 + m_2$ de *totale massa* en $m = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)^{-1}$ de *gereduceerde massa* is.

De beweging $\mathcal{L}_1$ is gewoon de beweging van een vrij deeltje (constante snelheid) en kunnen we als opgelost beschouwen. We hebben dus het tweedeeltjesprobleem gereduceerd tot een ééndeeltjesprobleem.

In de meeste gevallen, zoals bv. de beweging van de aarde rond de zon of nog extremer de beweging van een satelliet rond de aarde, geldt $m_1 \ll m_2$, waaruit volgt:

$$\begin{aligned} M &\approx m_2 \\ m &\approx m_1 \\ \bar{R} &\approx \bar{r}_2\,. \end{aligned} \tag{50}$$

5.2 Opgaven

1. Het impulsmoment $\bar{L} = m(\bar{r} \times \dot{\bar{r}})$ is een constante van de beweging. Zij is geassocieerd met de rotatiesymmetrieën $\bar{r}' = \bar{r} + \epsilon\bar{n} \times \dot{\bar{r}}$, waarbij $\bar{n}$ de richting van de rotaties aangeeft, respectievelijk volgens x, y en z-as. Toon dit aan.

[5] We hebben reeds gezien dat een dergelijke lagrangiaan invariant is onder translaties, rotaties en tijdsverschuiving.

2. De beweging ligt in een vlak: het vlak loodrecht op de constante impulsmomentvector (*eerste wet van Kepler*). Gebruik de rotatiesymmetrieën om het bewegingsvlak (loodrecht op $\bar{L}$) in het (x, y)-vlak te leggen. Introduceer poolcoördinaten:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \\ z &= 0\,. \end{aligned} \tag{51}$$

   Hoe ziet $\mathcal{L}_2$ eruit in poolcördinaten ? En hoe $\bar{L} = (0, 0, l_z)$?

3. Bereken de energie (zie oef. 3.1.).

4. Zoek de Euler-Lagrange vergelijkingen.

5. We spitsen ons nu toe op het Kepler-probleem. Hierbij heeft de potentiaal volgende vorm:

$$V(r) = -\frac{k}{r}\,. \tag{52}$$

   Twee voorbeelden:

   - Het gravitatieveld van de aarde:

$$\begin{aligned} \bar{F}_{\text{grav}} = -\nabla V = -\frac{k}{r^2}\bar{1}_{\bar{r}} = -\frac{GM_a m}{r^2}\bar{1}_{\bar{r}} \\ \Rightarrow k = GM_a m\,, \end{aligned} \tag{53}$$

     waarbij de volgende cijfergegevens nuttig zijn:

$$\begin{aligned} G &= 6,672\,10^{-11}\,\frac{\text{m}^2\text{N}}{\text{kg}^2} \\ R_a &= 6370\,\text{km} \quad \text{straal aarde} \\ M_a &= 5,976\,10^{24}\,\text{kg} \quad \text{massa aarde} \end{aligned} \tag{54}$$

     Dikwijls gebruikt men ook $\gamma = \frac{k}{m} = GM_a = 3,987\,10^{14}\,\text{m}^3\text{s}^{-2}$.

   - De Coulomb-potentiaal, die het onderwerp zal vormen van de volgende oefenzitting.

6. Bereken de ontsnappingssnelheid van een deeltje in het gravitatieveld van de aarde.

7. Gebruik de uitdrukking voor l_z in poolcoördinaten om een verband te zoeken tussen $\frac{d}{dt}$ en $\frac{d}{d\theta}$. Substitueer het gevonden resultaat in de Euler-Lagrange vergelijking voor r en maak verder de verandering van onbekende

$r = \frac{1}{u}$. Nu ben je in staat om de Euler-Lagrange vergelijking op te lossen. Je bekomt uiteindelijk:

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos(\theta - \theta_0)}\,, \tag{55}$$

met

$$p = \frac{l_z^2}{mk}\,. \tag{56}$$

8. Bepaal de *excentriciteit* ϵ als functie van E en l_z.

9. Teken de baan in de gevallen $\epsilon = 0$, $\epsilon < 1$, $\epsilon = 1$ en $\epsilon > 1$.

10. Bepaal voor $\epsilon < 1$ (de *ellips*) de lengte van de grote as a in functie van E.

11. Een bijzonder interessante baan voor satellietcommunicatie is de *baan van Clarke*[6]. Dit is een cirkelvormige baan ($\epsilon = 0$) boven de evenaar, waarbij de satelliet dezelfde hoeksnelheid heeft als de aarde m.a.w. de satelliet blijft steeds boven hetzelfde punt op de evenaar. Bereken de straal r_{cl}.

12. Bepaal de periode van de ellipsvormige baan. Gebruik daarvoor de tweede wet van Kepler.

13. Voorbeeld: een satelliet wordt gelanceerd loodrecht op de aardstraal op een afstand $8R_a$ van het aardmiddelpunt met een snelheid $\sqrt{\frac{\gamma}{12R_a}}$. Bereken ϵ, a, p, l, E, de baanvergelijking, r_{per} en r_{ap}.

14. *De Laplace-Runge-Lenz vector $\bar{A} = \bar{p} \times \bar{L} - \frac{mk}{r}\bar{r}$ is een behouden grootheid. Toon aan.

5.3 Opmerkingen

- Onder een volledige oplossing van de Euler-Lagrange vergelijkingen (4) wordt een uitdrukking van alle coördinaten in functie van de tijd bedoeld:

$$q^i = q^i(t)\,, \qquad \forall i\,. \tag{57}$$

Wanneer men uit dit stelsel de tijd t elimineert dan bekomt men de set *baanvergelijkingen*, die de verzameling van alle punten beschrijft die het puntdeeltje aandoet. De informatie over de tijd is men dan wel kwijt.

Een voorbeeld van een baanvergelijking is het verband tussen r en θ dat we vonden in oefening 7. We hebben niet naar een volledige oplossing

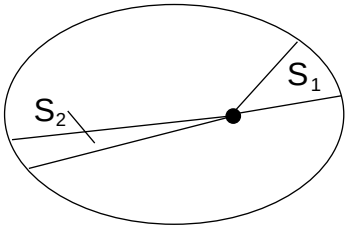
[6]Genoemd naar de science-fiction auteur Arthur C. Clarke, schrijver van o.a. *2001 — A Space Oddysey*. In verscheidene van zijn boeken gebruikt hij nog een drastischer concept nl. dat van de ruimtelift, gesteund door een kabel neergelaten vanuit een satelliet in de baan van Clarke.

$(r(t), \theta(t))$ gezocht omdat die zich — voor zover ik weet — niet in analytische vorm laat neerschrijven.

Toch kunnen we weer wat informatie krijgen over de tijd waarin het deeltje een bepaald stuk van de baan aflegt door de *tweede wet van Kepler (de perkwet)*: vermits $\bar{L}$ constant is ook de oppervlaktesnelheid die een deeltje beschrijft constant:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}|r \times \dot{r}| = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{l_z}{2m}\,. \tag{58}$$

Dit betekent dat gelijke oppervlakken in gelijke tijden worden beschreven.



De formule voor de periode die we hieruit in oefening 11 hebben afgeleid noemt men de *derde wet van Kepler*.

5.4 Bekomen formules

- Lagrangiaan in poolcoördinaten in het bewegingsvlak:

$$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r\dot{\theta}^2) + \frac{k}{r} \tag{59}$$

- Twee handige behouden grootheden:

$$\begin{aligned} l' &= \frac{l}{m} = r^2\dot{\theta}^2 \\ E' &= \frac{E}{m} = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{l'^2}{2r^2} - \frac{\gamma}{r}\,. \end{aligned} \tag{60}$$

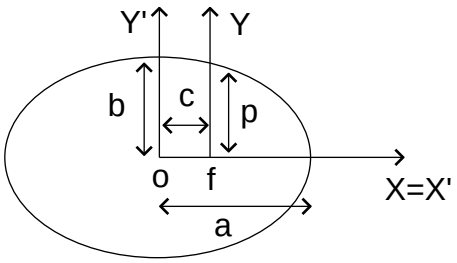
- Oplossing bewegingsvergelijking:

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon\cos(\theta - \theta_0)}\,, \tag{61}$$

met

$$\begin{aligned} p &= \frac{l'^2}{\gamma} \\ \epsilon &= \sqrt{1 + \frac{2E'l'^2}{\gamma^2}} \end{aligned} \tag{62}$$

- Verschillende gevallen:
  - Ellips: $E < 0$ (gebonden) $\Rightarrow \epsilon < 1$.



    De vergelijking van de ellips:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,, \tag{63}$$

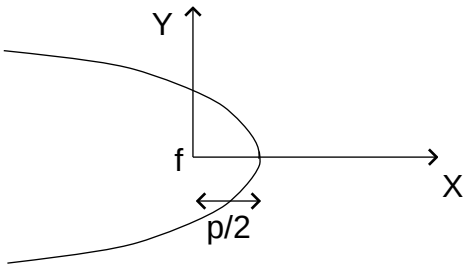
    met, waaruit:

$$\begin{aligned} a &= -\frac{\gamma}{2E'} = \frac{p}{1-\epsilon^2} = \frac{r_{\rm per} + r_{\rm ap}}{2} \\ r_{\rm per} &= \frac{p}{1+\epsilon} \\ r_{\rm ap} &= \frac{p}{1-\epsilon} \\ b &= \sqrt{1-\epsilon^2}a \\ c &= \epsilon a \\ x' &= x + c \end{aligned} \tag{64}$$

    De periode:

$$T = \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{\gamma}\,. \tag{65}$$

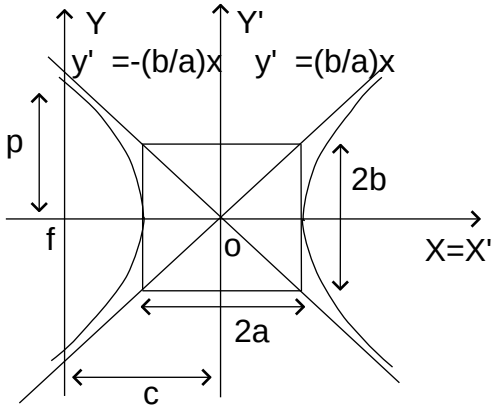
  - Parabool: $E = 0 \Rightarrow \epsilon = 1$.



    Ontsnappingssnelheid:

$$v_\infty = \sqrt{2\gamma}R_0 \tag{66}$$

– Hyperbool: $E > 0 \Rightarrow \epsilon > 1$.



De vergelijking van de hyperbool:

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\,, \tag{67}$$

met, waaruit:

$$\begin{aligned} a &= +\frac{\gamma}{2E'} = -\frac{p}{1-\epsilon^2} \\ b &= \sqrt{\epsilon^2 - 1}a \\ c &= \epsilon a \\ x' &= x - c \end{aligned} \tag{68}$$

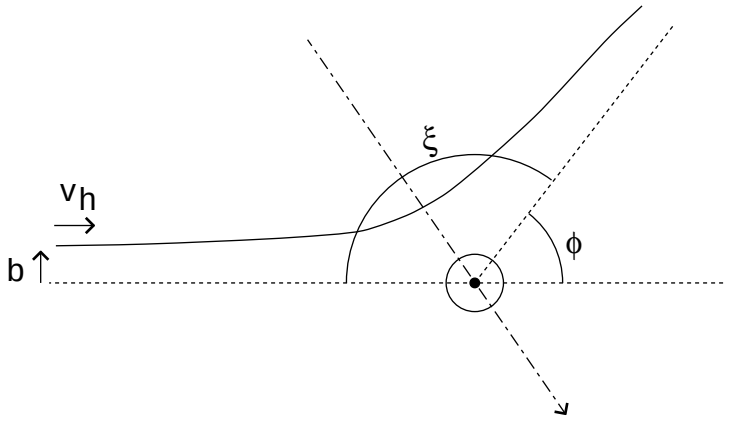
6 Toepassingen op het Kepler-probleem

6.1 Opgaven

1. De Rutherford verstrooing

   Verstrooiingsexperimenten van α-deeltjes (radioactieve staling) aan dunne metaalfolies, stelden Rutherford in 1911 in staat om het atoommodel van Thomsom te verwerpen en zijn eigen atoommodel aan te nemen.

   - Verstrooiing van 1 deeltje. Een α-deeltje (een He-kern, bestaande uit 2 neutronen en 2 protonen) wordt afgeschoten op een atoomkern met positieve lading Ze.



   Hierin is b de *impactparameter*, v_∞ de beginssnelheid, ξ de hoek tussen de twee asymptoten en ϕ de verstrooiingshoek.
   De Coulomb-potentiaal wordt gegeven door:

$$V_C = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{k}{r}, \tag{69}$$

   waarbij de k dus nu negatief is ! We hebben met een afstotende kracht te maken en de energie is altijd positief zodat de baan steeds een hyperbool is.

   - Zoek de grootte van het impulsmoment l_z t. o. v. het krachtcentrum.
   - Bereken de energie van het invallende deeltje.
   - Werk in poolcoördinaten. Vind de beperking op θ die volgt uit $r > 0$.
   - Vind de hoek tussen de asymptoten ξ en bereken daaruit de verstrooiingshoek ϕ.

- Verstrooiing van een bundel deeltjes op een laag trefkernen. De intensiteit van de bundel is:

$$I = \frac{\#\text{deeltjes}}{\text{opp. tijdseenheid}}\,. \tag{70}$$

De differentiëel werkzame doorsnede wordt gedefinieerd door:

$$d\sigma = \frac{d\sigma}{d\Omega}d\Omega = \frac{\#\text{deeltjes in ruimtehoek } d\Omega}{\text{tijdseenheid } I}\,. \tag{71}$$

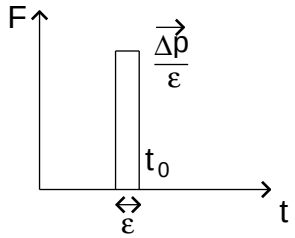
  - Hoeveel deeltjes vallen in op de ring tussen b en db ?
  - Deze worden verstrooid in de holle kegel tussen ϕ en $\phi + d\phi$. Met welke ruimtehoek stemt dit overeen ?
  - Vind de werkzame doorsnede.
  - Dit moet nog vermenigvuldigd met het aantal verstrooiers dat door de bundel „gezien" wordt: NSD, waarbij N de dichtheid van de verstrooiers, S de oppervlakte van de bundel en d de dikte van de laag verstrooiers.
  - Bereken de totale werkzame doorsnede:

$$\sigma = \int_0^\pi \sigma(\phi)d\Omega \tag{72}$$

2. De Hohman-transfer: manoeuvre om van satellietbaan te veranderen. Door de raketmotor even te laten ontbranden kan een satelliet van baan veranderen. De verandering van impuls die daarvan het gevolg is wordt gegeven door:

$$\Delta\bar{p} = \int \bar{F}(t)dt\,. \tag{73}$$

waarbij $\bar{F}(t)$ de kracht is die door de raketmotor wordt uitgeoefend. We nemen nu de limiet $\epsilon \to 0$, waarbij de oppervlakte onder de kromme $F(t)$ en dus de verandering in impuls constant blijft.



We spreken dan van een Dirac delta-functie: $\bar{F}(t) = \Delta\bar{p}\delta(t - t_0)$. Gebruik deze impuls-ontbrandingen om van een cirkelbaan met straal r_1 naar een cirkelbaan met r_2 over te gaan.

7 Het Hamilton-formalisme

7.1 Theorie

De lagrangiaan $L(q, \dot{q}, t)$ is afhankelijk van de coördinaten q^i, de snelheden $\dot{q}^i$ en eventueel de tijd t. We definiëren nu de momenta:

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}(q, \dot{q}, t)\,, \tag{74}$$

en veronderstellen dat we deze relatie kunnen inverteren naar de $\dot{q}^i$:

$$\dot{q}^k = \rho^k(p, q, t)\,. \tag{75}$$

De nodige en voldoende voorwaarde hiertoe is dat

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}\right) \neq 0\,. \tag{76}$$

In dat geval spreekt men van een *reguliere lagrangiaan*[7]. Nu maken we een coordinatentransformatie:

$$(t, q^i, \dot{q}^i) \to (t, q^i, p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j})\,, \tag{77}$$

met inverse

$$(t, q^i, p_j) \to (t, q^i, \dot{q}^i = \rho^i(t, q, p))\,. \tag{78}$$

Dit is de *Legendre-transformatie*[8]. Om die te realiseren definiëren we de hamiltoniaan:

$$H(t, q, p) = p_i \rho^i(t, q, p) - L(t, q, \rho^i(t, q, p))\,. \tag{79}$$

In deze coördinaten worden de Euler-Lagrange vergelijkingen:

$$\begin{aligned} \dot{q}^i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_j &= -\frac{\partial H}{\partial q^j}\,. \end{aligned} \tag{80}$$

Als k het aantal veralgemeende coördinaten is, hebben we dus k tweede-orde differentiaalvergelijkingen omgezet in $2k$ eerste-orde differentiaalvergelijkingen. Iets dergelijks hebben we ook al gedaan in de eerste stap van sectie 4.4.

Merk op dat:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}\,. \tag{81}$$

[7] Bekende voorbeelden van niet-reguliere lagrangianen zijn ijktheoriën.

[8] Deze transformatie is verwant met de verandering van onafhankelijk veranderlijken in thermodynamica

Vermits de meest voorkomende lagrangianen niet expliciet afhankelijk zijn van de tijd, zullen de overeenkomstige hamiltonianen dat ook niet zijn.

De coördinatenruimte (q^i, p_i) wordt de *faseruimte* genoemd. De functies op de faseruimte vormen met de optelling van functies een reële vectorruimte. We definiëren op deze vectorruimte het Poisson-haakje:

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q^i}\,. \tag{82}$$

Het Poisson-haakje heeft de volgende eigenschappen:

$$\begin{aligned} \{f, g\} &= -\{g, f\} && \text{antisymmetrie} \\ \{af + bh, g\} &= a\{f, g\} + b\{h, g\}, \quad \forall a, b \in \mathbb{R} && \text{lineariteit} \\ \{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} &= 0 && \text{Jacobi-identiteit}\,. \end{aligned} \tag{83}$$

Een vectorruimte aangevuld met een bewerking die de eigenschappen (83) heeft, noemt men een *Lie-algebra*.

We zien dat:

$$\begin{aligned} \dot{f} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial f}{\partial p_j}\dot{p}_j \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\}\,, \end{aligned} \tag{84}$$

waarbij we gebruik maakten van (80).

Het grote voordeel van het Hamilton-formalisme is dat de overgang naar quantummechanica onmiddellijk is: de coördinaten (q^i, p_i) worden omgezet in niet-commuterende operatoren. De Poisson-haakjes worden daarbij vervangen door commutatoren:

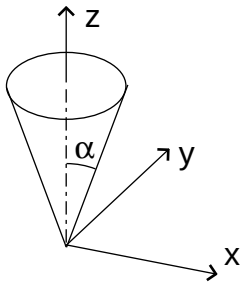
$$\{q^i, p_j\} = \delta^i_j \to [\hat{q}^i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta^i_j\,. \tag{85}$$

Het nadeel is dan weer dat ze de (eventuele) Lorentz-symmetrie van een theorie, die in de lagrangiaan expliciet zichtbaar is, verbergen. In meer recente theorieën wordt via het padintegraalformalisme rechtstreeks gequantiseerd vanuit de lagrangiaan.

7.2 Oefeningen

1. Maak voor de harmonische oscillator $L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}$ de overstap naar het Hamilton-formalisme. Bereken H. Schrijf de bewegingsvergelijkingen op voor x en p.

2. Deeltje gebonden aan een halve kegel. Stap over op geschikte veralgemeende coördinaten. Zoek L, de momenta, H en de Hamilton-vergelijkingen.



3. Kepler-probleem: $L = \frac{m\dot{\bar{r}}^2}{2} + \frac{k}{r}$. Ga over naar het Hamilton-formalisme. Beschouw de Laplace-Runge-Lenz vector:

$$\bar{A} = \bar{p} \times \bar{L} - \frac{mk}{r}\bar{r}\,. \tag{86}$$

Bereken $\{L_i, H\}$ en $\{L_i, f(r)\}$. Gebruik dit om $\{A_i, H\}$ uit te rekenen.

7.3 De antisymmetrische tensor

De *totaal antisymmetrische tensor* is een tensor van rang 3, waarvan de componenten gegeven worden door het *Levi-Civita symbool* $\epsilon_{ijk} = (-1)^P$, waarbij P de permutatie is die 123 brengt naar ijk en $(-1)^P$ de pariteit van die permutatie is. Concreet:

$$\begin{aligned} \epsilon_{123} &= 1 \\ \epsilon_{ijk} &= -\epsilon_{jik} = \epsilon_{jki}\,. \end{aligned} \tag{87}$$

De determinant van de 3×3 matrix M wordt gegeven door:

$$\det M = \sum_P (-1)^P M_1^{P(1)} M_2^{P(2)} M_3^{P(3)} = M_1^l M_2^m M_3^n \epsilon_{lmn}\,. \tag{88}$$

Bedenken we dat de determinant van een matrix met twee gelijke rijen nul is en dat de determinant van teken verandert als men twee rijen verwisselt, dan kunnen we (88) nog herschrijven als:

$$\det M \epsilon_{ijk} = M_i^l M_j^m M_k^n \epsilon_{lmn}\,. \tag{89}$$

Onder een coördinatentransformatie $x'^i(x^j)$ transformeert[9] de antisymmetrische tensor als volgt:

$$\begin{aligned} \epsilon'_{ijk} &= \frac{\partial x^l}{\partial x'^i}\frac{\partial x^m}{\partial x'^j}\frac{\partial x^n}{\partial x'^k}\epsilon_{lmn} \\ &= \det\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right)\epsilon_{ijk}\,, \end{aligned} \tag{90}$$

[9]We herinneren nog even aan het transformatiegedrag van een covariante respectievelijk contravariante tensor: $A'_k = A_l \frac{\partial x^l}{\partial x'^k}$ en $B'^k = B^l \frac{\partial x'^k}{\partial x^l}$. Zie ook formule (8).

waarbij we gebruik maakten van betrekking (89). Als we nu wensen dat de antisymmetrische tensor er in alle coördinaten hetzelfde uitziet i.e. $\epsilon'_{ijk} = \epsilon_{ijk}$, dan moeten we het strikte tensor-transformatiegedrag laten vallen en vermenigvuldigen we nog eens met det $\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)$:

$$\epsilon'_{ijk} = \det\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right) \frac{\partial x^l}{\partial x'^i} \frac{\partial x^m}{\partial x'^j} \frac{\partial x^n}{\partial x'^k} \epsilon_{lmn} \,. \tag{91}$$

Men spreekt dan van een *pseudotensor*.

Beperken we onze transformaties tot eigenlijke rotaties ($\det(\frac{\partial x'}{\partial x}) = 1$) en oneigenlijke rotaties (reflecties, spiegelingen, waarbij dus $\det(\frac{\partial x'}{\partial x}) = -1$), dan transformeert een pseudotensor als een echte tensor onder de eigenlijke rotaties en krijgt een extra minteken onder de oneigenlijke rotaties.

Door contractie met de antisymmetrische tensor kunnen we uit twee vectoren en pseudovector construeren:

$$C_i = \epsilon_{ijk} A^j B^k = (\bar{A} \times \bar{B})_i \,. \tag{92}$$

Inderdaad, dit is het gewone vectorproduct.

De antisymmetrische tensor heeft volgende belangrijke eigenschap:

$$\epsilon_{ijk} \epsilon^{lmk} = \delta^l_i \delta^m_j - \delta^m_i \delta^l_j \,. \tag{93}$$

Merk op dat als we onze beperken tot (eigenlijk en oneigenlijke) rotaties als transformaties er geldt:

$$\frac{\partial x'^i}{\partial x^j} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \,, \tag{94}$$

zodat het onderscheid tussen covariante en contravariante tensoren verdwijnt. Men zegt dat rotaties $R^i_j = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j}$ *orthogonaal* zijn: $RR^T = I$, zodat $R^{-1} = R^T$, waaruit (94) volgt. In wat volgt noteren we alle indices onderaan.

We kunnen nu twee reeds gebruikte eigenschappen van vectorproducten bewijzen:

$$\begin{aligned} \left[\bar{A} \times (\bar{B} \times \bar{C})\right]_i &= \epsilon_{ijk} A_j \epsilon_{klm} B_l C_m \\ &= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) A_j B_l C_m \\ &= B_i (\bar{A} \cdot \bar{C}) - C_i (\bar{A} \cdot \bar{B}) \,, \end{aligned} \tag{95}$$

en

$$\begin{aligned} \bar{A} \cdot (\bar{B} \times \bar{C}) &= \epsilon_{ijk} A_i B_j C_k \\ &= \bar{B} \cdot (\bar{C} \times \bar{A}) \\ &= \bar{C} \cdot (\bar{A} \times \bar{B}) \,. \end{aligned} \tag{96}$$

8 Hamilton-formalisme en canonische transformaties

8.1 Theorie

- In het Hamilton-formalisme is er een veel directer verband tussen symmetrieën en behouden grootheden dan in het Lagrange-formalisme (herinner de stelling van Noether). Men kan aantonen dat de transformatie gegenereerd door $F(q,p)$,[10]

$$\begin{aligned} q'^i &= q^i + \{q^i, \epsilon F\} \\ p'_j &= p_j + \{p_j, \epsilon F\}\,, \end{aligned} \tag{97}$$

een symmetrie is van de hamiltoniaan $H(q,p)$ als en slechts $\{F,H\} = c$, met c een constante. Dus als $F(q,p)$ een behouden grootheid is ($\{F,H\} = 0$), dan genereert F een symmetrie. Omgekeerd, als F een symmetrie genereert ($\{F,H\} = c$), dan bestaat er een behouden grootheid $G(t,q,p) = F(q,p) - ct$, want

$$\frac{dG}{dt} = \frac{\partial G}{\partial t} + \{G,H\} = -c + c = 0\,. \tag{98}$$

- Een transformatie van de coördinaten:

$$\begin{aligned} q'^i &= q'^i(t,q,p) \\ p'_j &= p'_j(t,q,p)\,, \end{aligned} \tag{99}$$

is *canonisch* als ze *elk* hamiltoniaans systeem omzet in een hamiltoniaans systeem. Een nodige en voldoende voorwaarde daartoe is:

$$\begin{aligned} \{q'^i, q'^j\}_{q,p} &= 0 \\ \{p'_i, p'_j\}_{q,p} &= 0 \\ \{q'^i, p'_j\}_{q,p} &= \delta^i_j\,. \end{aligned} \tag{100}$$

Een handige manier om canonische transformaties te beschrijven zijn *voortbrengende functies*. Afhankelijk van het type bestaan één of meerdere van de volgende functies:

$$\begin{aligned} &F_1(q,q',t) \\ &\qquad dF_1 = p_i dq^i - p'_i dq'^i + (H' - H)dt \\ &\qquad p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q^i} \qquad p'_i = -\frac{\partial F_1}{\partial q'^i} \qquad H' = H + \frac{\partial F_1}{\partial t} \\ &F_2(q,p',t) = F_1(q,q',t) + p'_i q'^i \\ &\qquad dF_2 = p_i dq^i + q'^i dp'_i + (H' - H)dt \\ &\qquad p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q^i} \qquad q'^i = \frac{\partial F_2}{\partial p'_i} \qquad H' = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} \end{aligned} \tag{101}$$

[10] Wanneer F en/of H afhankelijk is van t, dan ligt het iets moeilijker.

$$
\begin{aligned}
F_3(p,q',t) &= F_1(q,q',t) - p_i q^i \\
dF_3 &= -q^i dp_i - p'_i dq'^i + (H' - H)dt \\
q^i &= -\frac{\partial F_3}{\partial p_i} \qquad p'_i = -\frac{\partial F_3}{\partial q'^i} \qquad H' = H + \frac{\partial F_3}{\partial t} \\
F_4(p,q',t) &= F_1(q,q',t) + p'_i q'^i - p_i q^i \\
dF_4 &= -q^i dp_i + q'^i dp'_i + (H' - H)dt \\
q^i &= -\frac{\partial F_4}{\partial p_i} \qquad q'^i = \frac{\partial F_4}{\partial p'_i} \qquad H' = H + \frac{\partial F_4}{\partial t}\,.
\end{aligned}
\tag{102}
$$

8.2 Oefeningen

1. Is de volgende transformatie canonisch ? Indien ja, zoek een voortbrengende functie.

$$
q' = \ln\left(\frac{\sin p}{q}\right) \qquad p' = q\cot p\,. \tag{103}
$$

2. Zelfde vraag als boven.

$$
q' = \arctan\left(\frac{q}{p}\right) \qquad p' = \frac{1}{2}(p^2 + q^2)\,. \tag{104}
$$

3. Zoek een voorwaarde voor a en b zodat de transformatie canonisch is. Zoek een voortbrengende functie. Zoek H', kies a gunstig.

$$
\begin{aligned}
H &= \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2} \\
q &= \sqrt{ap'}\sin q' \\
p &= \sqrt{bp'}\cos q'\,.
\end{aligned}
\tag{105}
$$

9 Kleine trillingen

9.1 Theorie

- Een stabiele evenwichtstoestand van een systeem wordt gegeven door een minimum van de potentiële energie i.e. $\frac{\partial V}{\partial q^i}(q_0^1, \ldots, q_0^k) = 0, \forall i$. Dat is inderdaad een statische oplossing — een oplossing waarvoor $\dot{q}^i = \ddot{q}^i = 0, \forall i$ en dus $\frac{d}{dt} \equiv 0, T = 0$ — van de Euler-Lagrange vergelijkingen.

- We veronderstellen dat dit systeem niet veel uitwijkt van dat evenwicht (*kleine trilling*) en trachten de lagrangiaan $L = T - V$ te benaderen tot op tweede orde in de afwijkingen $\Delta q^i = q^i - q_0^i$.

  De Taylorexpansie van de potentiaal wordt:

$$V(q) = V(q_0) + \left.\frac{\partial V}{\partial q^j}\right|_{q=q_0} \Delta q^j + \frac{1}{2} \left.\frac{\partial^2 V}{\partial q^j \partial q^l}\right|_{q=q_0} \Delta q^j \Delta q^l + \mathcal{O}^3(\Delta q)\,. \quad (106)$$

  We kunnen bij de potentiaal een arbitraire constante optellen zodat $V(q_0) = 0$. De tweede term is nul, omdat (q_0^i) een evenwichtstoestand is. Enkel de derde term blijft staan:

$$V(q) = V_{jl} \Delta q^j \Delta q^l + \mathcal{O}^3(\Delta q)\,, \quad (107)$$

  waarbij de matrix $V_{jl} = \left.\frac{\partial^2 V}{\partial q^j \partial q^l}\right|_{q=q_0}$.

  Voor de kinetische energie vinden we (als de holonome verbindingen niet van de tijd afhangen):

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \bar{v}_i^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q^j} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q^l} \right) \dot{q}^j \dot{q}^l \end{aligned} \quad (108)$$

  waarbij we gebruik gemaakt hebben van:

$$\bar{v}_i = \dot{\bar{r}}_i = \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q^j} \dot{q}^j\,. \quad (109)$$

  Ook hier voeren we een matrix $T_{jl} = \sum_i m_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q^j} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q^l}$ in, zodat we voor de lagrangiaan tot op tweede orde de volgende vorm vinden, waarbij we voortaan de Δ's weglaten:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \dot{q}^i T_{ij} \dot{q}^j - \frac{1}{2} q^i V_{ij} q^j \\ &= \frac{1}{2} [\dot{q}]^t [T] [\dot{q}] - \frac{1}{2} [q]^t [V] [q]\,. \end{aligned} \quad (110)$$

In de laatste lijn zijn $[V], [T], [q], [\dot{q}]$ matrices en $[]^t$ duidt de transpose aan.

Dit komt op hetzelfde neer als het benaderen van de Euler-Lagrange vergelijkingen tot op eerste orde:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = T_{ij}\ddot{q}^j + V_{ij}q^j = 0\,. \tag{111}$$

- Vergelijking (110) is in feite de matrixveralgemening van de harmonische oscillator:

$$L_{\text{osc}} = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2\,. \tag{112}$$

Dus:

$$\begin{aligned} &[T] : \text{„massa”} \\ &[V] : \text{„veerconstante”} \end{aligned} \tag{113}$$

We inspireren ons hierop om op zoek te gaan naar oplossingen van de vorm: $q^i = a^i e^{\pm i\omega t}$. Vullen we dit in in vergelijking (111), dan moeten we op zoek naar niet-triviale oplossingen van de matrix-vergelijking

$$([V] - \omega^2[T])[a] = 0\,. \tag{114}$$

Die bestaan als en slechts als voldaan is aan volgende „eigenwaarde”-vergelijking:

$$\det\left([V] - \omega^2[T]\right) = 0\,, \tag{115}$$

waaruit we de pulsaties ω_k kunnen bepalen

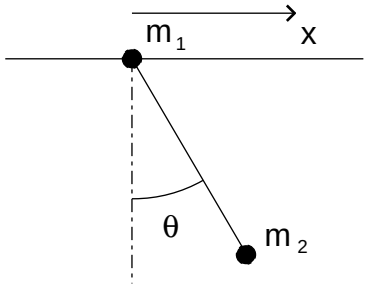
- Opmerking:

$$\begin{aligned} V \text{ minimaal} &\Leftrightarrow a^i \frac{\partial^2 V}{\partial q^i \partial q^j} a^j \geq 0,\ \forall a \\ &\Leftrightarrow [a]^t[V][a] \geq 0,\ \forall a \Leftrightarrow V \text{ positief semi-definiet} \end{aligned} \tag{116}$$

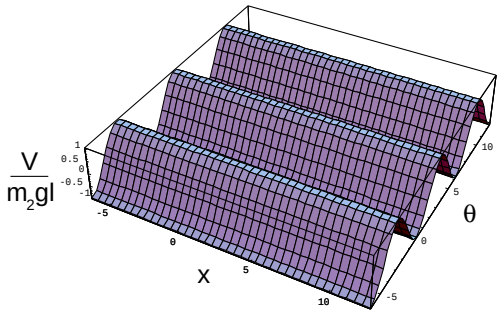
Uit de symmetrie van $[V]$ en $[T]$ haalt men dat de ω_k^2 reëel zijn en uit het feit dat ze positief semi-definiet zijn: $\omega_k^2 \geq 0$.

9.2 Oefeningen

1. Slinger op een rail

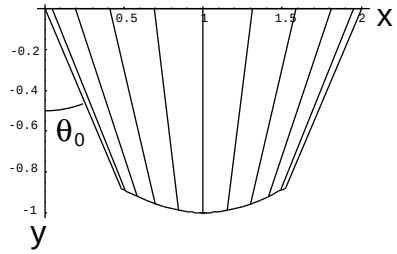


- Bepaal de lagrangiaan L.
- Wat is de evenwichtstoestand ? Benader L tot op tweede orde in θ en x en zoek de matrices $[T]$ en $[V]$.



Plot van de potentiaal $V(x, \theta)$.

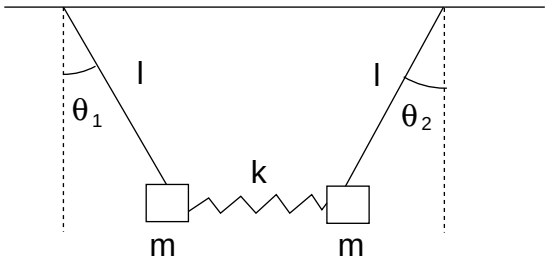
- Vind de oplossing van $\det([V] - \omega^2[T]) = 0$ — de „eigenfrequenties".
- Zoek de „eigenvectoren" uit $[V][a] = \omega^2[T][a]$.
- Schrijf de meest algemene oplossing op.



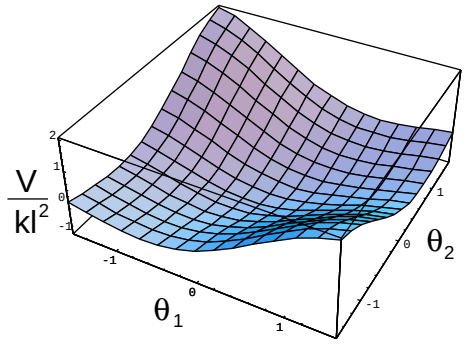
Oplossing voor beginvoorwaarden
$\theta(0) = \theta_0 = \frac{1}{2}, x(0) = \dot{\theta}(0) = \dot{x}(0) = 0$ met $\omega = 1$.

- Tracht die ook uit de gelineariseerde Euler-Lagrange vergelijkingen te vinden.

2. Twee gekoppelde slingers



- Bepaal de lagrangiaan L.
  - Hou bij het berekenen van de potentiële energie van de veer enkel rekening met de horizontale afstand tussen de slingers.
  - De veer is in evenwicht ($V_{\text{veer}} = 0$) als beide slingers verticaal staan.
- Benader L tot op tweede orde rond de evenwichtstoestand. Wat als het evenwicht zich zou instellen voor $\theta_1 = -\theta_2 = 45°$?



Plot van de potentiaal $V(\theta_1, \theta_2)$ met $\omega = kl^2 = 2mgl = 1$.

- Zoek de „eigenfrequenties" en „eigenvectoren" en schrijf de meest algemene oplossing op.
- Bestudeer beginvoorwaarden waarbij $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = 0$ en respectievelijk:
  - $\theta_1 = C$ en $\theta_2 = 0$.
  - $\theta_1 = \theta_2 = C$.
  - $\theta_1 = -\theta_2 = C$.
- Voer nu wrijving in aan de scharnieren van de staven:

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} f(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2)\,. \tag{117}$$

De Euler-Lagrange vergelijkingen worden dan:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}^i} = 0 \\ &\Rightarrow T_{ij}\ddot{q}^j + F_{ij}\dot{q}^j + V_{ij}q^j = 0\,. \end{aligned} \tag{118}$$

Stellen we een oplossing van de vorm $q^j = a^j e^{-i\omega t}$ voor, dan wordt de eigenvectorvergelijking:

$$([V] - i\omega[F] - \omega^2[T])[a] = 0\,, \tag{119}$$

en de eigenwaardevergelijking:

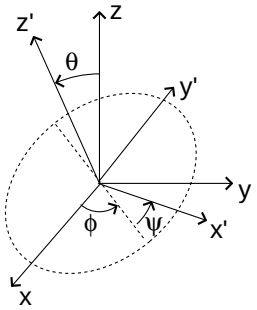
$$\det([V] - i\omega[F] - \omega^2[T]) = 0\,. \tag{120}$$

10 Dynamica van onvervormbare voorwerpen

10.1 Theorie

Een voorwerp is *onvervormbaar* als de afstand tussen twee willekeurige punten van het voorwerp onveranderd blijft. De positie van een punt in de ruimte is bepaald als de afstand tot drie niet-colineaire referentiepunten gekend is. Bijgevolg, geeft men de positie aan van drie niet-colineaire punten van een voorwerp, dan liggen meteen de posities van alle punten van het voorwerp vast. Deze drie punten geven aanleiding tot 9 coördinaten, waartussen er 3 voorwaarden zijn vermits de afstanden tussen de 3 punten vastliggen. We hebben dus 6 coördinaten nodig om de positie van een voorwerp te beschrijven.

Trekt men door twee van die punten een rechte, construeert men de loodlijn vanuit het derde punt op die rechte en vervolledigt men dit met een rechte loodrecht op de twee voorgaande, dan verkrijgt men een assenstelsel verbonden aan het voorwerp. We kunnen de positie van dit assenstelsel aangeven door de positie van de oorsprong (3 coördinaten) en de Euler-hoeken θ, ϕ en ψ.



De positie van assenstelsel $ox'y'z'$ tegenover referentieassenstelsel $oxyz$ wordt aangegeven door de Euler-hoeken.

De beweging (verandering van positie) van een onvervormbaar voorwerp bestaat uit twee componenten:

- Een ogenblikkelijke *translatie*: we kunnen dit deel van de beweging volledig specifiëren door het opgeven van de ogenblikkelijke snelheid $\bar{v}_C$ van een punt van het voorwerp. Meestal kiezen we voor dit *herleidingspunt* het massacentrum van het voorwerp omdat deze keuze ons toelaat formules (124) en (127) te gebruiken. In sommige gevallen kan een andere keuze aangewezen zijn: bv. rotatie rond een vast punt. Voor het impulsmomentum tegenover een vast punt geldt formule (127) eveneens.

- Een ogenblikkelijke *rotatie*: dit deel wordt volledig gespecifieerd door de ogenblikkelijke rotatievector $\bar{\omega}$. Het verband tussen de Euler-hoeken en de

ogenblikkelijke rotatievector wordt gegeven door:

$$\begin{aligned}\omega_{x'} &= \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi \\ \omega_{y'} &= \dot{\phi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi \\ \omega_{z'} &= \dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi}\,.\end{aligned} \tag{121}$$

Met deze twee vectoren kan men de snelheid van elk punt P van het voorwerp berekenen (zie ook sectie 4 over de Relatieve Beweging):

$$\bar{v}_P = \bar{v}_C + \mathcal{M}_P\,\bar{\omega}\,. \tag{122}$$

Met $\mathcal{M}_P\,\bar{\omega}$ bedoelen we het momentum van de vector $\bar{\omega}$ t.o.v. P, waarbij $\bar{\omega}$ geplaatst wordt in het punt C, m.a.w.

$$\mathcal{M}_P\,\bar{\omega} = \bar{r}_{PC} \times \bar{\omega}\,. \tag{123}$$

Nu komt het er nog op aan om deze twee vectoren $\bar{v}_C(t)$ en $\bar{\omega}(t)$ te berekenen uit de krachten die op het voorwerp inwerken:

- Translatie. Voor het massacentrum en *enkel* daarvoor geldt:

$$\sum \bar{F}_i' = M\bar{a}_c\,, \tag{124}$$

  waarbij $\bar{F}_i'$ de *uitwendige* krachten zijn die op het voorwerp inwerken en $\bar{a}_C$ de versnelling van het massacentrum en M de massa van het voorwerp. Beide kan men als volgt berekenen uit de dichtheidsverdeling $\rho(x,y,z)$ van het voorwerp:

$$\begin{aligned} M &= \int_V dxdydz\,\rho(x,y,z) \\ \bar{r}_C &= \frac{\int_V dxdydz\,\rho(x,y,z)\,\bar{r}_{CP}}{M}\,. \end{aligned} \tag{125}$$

- Rotatie. Definiëren we het totaal impulsmoment $\bar{L}_C$ t.o.v. het massacentrum C als:

$$\bar{L}_C = \int_V dxdydz\,\rho(x,y,z)\,\bar{r}_{CP}(x,y,z) \times \bar{v}'(x,y,z)\,, \tag{126}$$

  met $\bar{v}'(x,y,z) = \bar{v}(x,y,z) - \bar{v}_C = \omega \times \bar{r}_{CP}$ de relatieve positie van het punt P, dan voldoet $\bar{L}_C$ aan de volgende differentiaalvergelijking:

$$\sum \mathcal{M}_c\,\bar{F}_i' = \frac{d\bar{L}_C}{dt} = \left(\frac{d\bar{L}_C}{dt}\right)_{\text{rel}} + \bar{\omega} \times \bar{L}_c\,. \tag{127}$$

Laat mij nog even herhalen dat deze formule *enkel* geldt als C het massacentrum is of als C een vast punt is i.e. een punt dat niet beweegt.

Het enige wat nog ontbreekt is een verband tussen $\bar{L}_C$ en $\bar{\omega}$. Dit kunnen we vinden door (126) uit te werken:

$$\begin{aligned}\bar{L} &= \int dxdydz\, \bar{r}_{CP} \times \bar{v}' \\ &= \int dxdydz\, \bar{r}_{CP} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_{CP}) \\ &= \int dxdydz\, (\bar{\omega}\, \bar{r}_{CP}^2 - \bar{r}_{CP}(\omega \cdot \bar{r}_{CP}))\end{aligned} \tag{128}$$

Men vindt dus:

$$\begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{zx} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} . \tag{129}$$

De symmetrische positief-definiete vierkante matrix in deze vergelijking noemt men de *traagheidsmatrix*. De componenten ervan worden als volgt berekend:

$$I_{x^i x^j} = \int_V dxdydz\, \rho(x,y,z)\, (r^2 \delta^{ij} - x^i x^j) . \tag{130}$$

Hij wordt dus volledig bepaald door de aard en de vorm van het voorwerp. Door een bepaalde keuze van assenstelsel kan men de traagheidsmatrix diagonaliseren. De assen noemt men dan de centrale hoofdtraagheidsassen. Nemen we een rotatie rond een centrale hoofdtraagheidsheidsas: bvb. de x'-as:

$$\bar{\omega} = \omega \bar{e}_{x'} , \tag{131}$$

dan wordt vectorvergelijking (127):

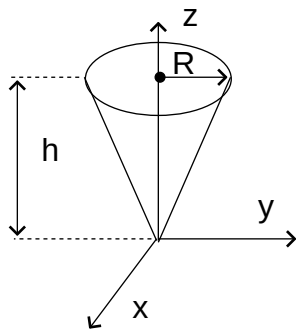
$$\begin{aligned} M_{x'} &= I_{x'x'}\dot{\omega} \\ M_{y'} &= 0 \\ M_{z'} &= 0 \end{aligned} \tag{132}$$

Hieruit kan je afleiden dat je een voorwerp met constante hoeksnelheid ($\omega = 0$) rond een centrale hoofdtraagheidsas kan laten draaien zonder dat daar een uitwendig momentum voor nodig is. De hoofdtraagheidsassen zijn dus de *natuurlijke* rotatieassen van het voorwerp.

Heeft een voorwerp een symmetrieas, dan is deze as meteen een hoofdtraagheidsas. Is deze symmetrieas een rotatiesymmetrieas, dan vervolledigt elk paar onderling loodrechte assen in het loodvlak op die as, het hoofdtraagheidsassenstelsel.

10.2 Oefeningen

1. Bereken het massamiddelpunt van een kegel. Bereken het traagheidsmoment t.o.v. de centrale as. Welke resultaat verwacht je voor een cylinder ? En voor een holle cylinder ?



2. Bereken het traagheidsmoment van een bol t.o.v. een as door het centrum. Gebruik bolcoördinaten.

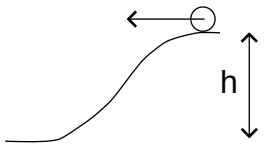
3. Een 1-dimensionale staafvormige slinger met constante dichtheid per lengte-eenheid ρ en lengte l.

   - Bereken het traagheidsmoment I t.o.v. een as door het ophangpunt.
   - Bereken de kinetische energie T.
   - Bereken de potentiële energie V van de zwaartekracht.
   - Bereken de eigenfrequentie van de slinger.

11 Brainteasers

De volgende brainteasers vragen weinig berekening, maar testen op fysisch inzicht:

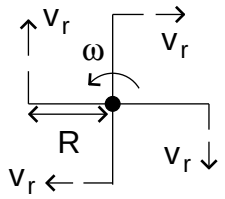
1. Een balletje rolt van een helling. Het begint vanuit stilstand op hoogte h. Een student berekent de snelheid van het balletje onderaan via behoud van energie: $E = \frac{1}{2}mv^2 + mgz$. Na uitvoering van de proef blijkt de snelheid echter kleiner dan verwacht. Wat is er mis ?



2. De inzittenden van een auto worden met een schok naar links geslingerd door een bruusk manoeuvre van de chauffeur. Eén van de inzittenden heeft een ballon vast, gevuld met helium. Wat gebeurt daarmee ?

3. Jantje is bij een reparatie van een communicatiesatelliet gevallen. Hij beweegt nu in een cirkelvormige baan rond de aarde. Mieke daarentegen beweegt in een ellipsvormige ($\epsilon = 0.2$) baan in het zelfde vlak. Mieke haalt Jantje in en ze botsen met elkaar. Na de botsing besluiten ze samen te blijven. Op welke baan bewegen ze dan ? Jantje weegt 150 kg (met ruimtepak!) en Mieke 120 kg.

4. Een watersproeier heeft 4 armen. Hij draait in een horizontaal vlak en uit elk van de 4 spuitmonden stroomt water met een relatieve snelheid v_r. De sproeier beweegt wrijvingloos rond zijn rotatie-as. Wat is de hoeksnelheid van de sproeier?

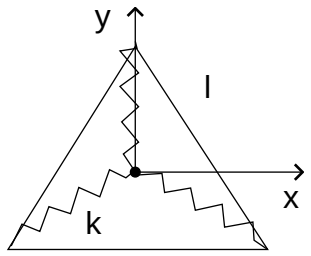


5. Beschouw de volgende lagrangiaan:

$$\frac{1}{2}\dot{q}^i M_{ij} \dot{q}^j - V(q)\,. \tag{133}$$

Bereken de toegevoegde momenta en construeer de hamiltoniaan in de veronderstelling dat $\det M \neq 0$. Wat betekent het als $\det M = 0$? Beschouw een transformatie $q'^i = A^i{}_j q^j$. Hoe transformeren de momenta p_i ? Wat is de voorwaarde op $A^i{}_j$ opdat de transformatie canonisch zou zijn. Had je dit verwacht ?

6. Een punt is met drie veren, elk met veerconstante k verbonden met de hoekpunten van een gelijkzijdige driehoek met zijde l.



Welke symmetrieën verwacht je voor de lagrangiaan ? Zijn deze symmetrieen bruikbaar voor de stelling van Noether ? Tracht met zo min mogelijk rekenwerk de lagrangiaan in de kleine-trilling benadering op te schrijven i.e. bepaal de coëfficiënten in:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}(V_{xx}x^2 + 2V_{xy}xy + V_{yy}y^2)\,. \tag{134}$$

(Hint: Maak gebruik van de symmetrieën.) Welke symmetrieën heeft de kleine-trilling lagrangiaan ? Kan je nu de stelling van Noether gebruiken om een constante van de beweging te vinden ? Is deze constante van de beweging ook geldig buiten het kleine-trilling régime ?