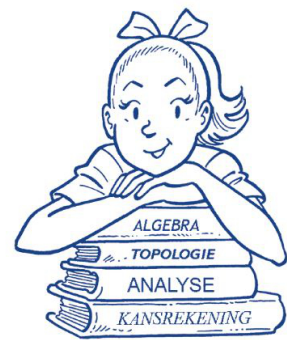


WISKUNNEND WISKE

DE SLIJMERIGE SLAK

FINALE 2019 - OPDRACHT 1



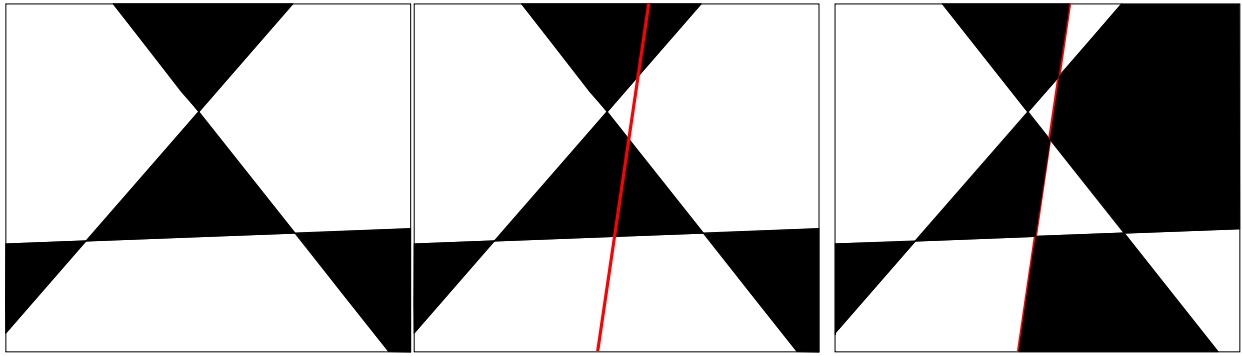
Opdracht (40 minuten)

In het vlak bevinden zich n rechten waarvan geen drie rechten door het zelfde punt gaan. Turbo de slak zit op een punt op precies één van de rechten en begint over de rechte te glijden. Turbo glijdt over deze rechte totdat zij een snijpunt tegenkomt. Vanaf dit snijpunt vervolgt zij haar reis langs de andere rechte door linksaf of rechtsaf te draaien. Zo zet zij haar reis verder. Aan elk kruispunt beslist zij willekeurig of zij naar links of naar rechts draait. Zij gaat aan een kruispunt nooit rechtdoor. Behalve bij snijpunten verandert Turbo nooit van glijrichting.

1. Stel $n = 3$. Kan er een lijnstuk bestaan waar Turbo in beide richtingen over heen glijdt gedurende haar reis?
2. Wat gebeurt er wanneer we een rechte toevoegen? Kan je nu een lijnstuk vinden waar Turbo in beide richtingen overheen glijdt?
3. Stel nu $n = 2019$. Bestaan er nu lijnstukken waar Turbo in beide richtingen overheen glijdt?
4. Kan je je redenering veralgemenen naar een willekeurige n ?

Oplossing

De rechten verdelen het vlak in disjuncte gebieden. We beweren dat er een alternerende 2-kleuring van deze gebieden bestaat, i.e. dat elk gebied in zwart of wit kan gekleurd worden zodat als twee gebieden een lijnsegment gemeenschappelijk hebben ze een verschillende kleur hebben. Dit kan via inductie aangetoond worden. Als er slechts één rechte is, is dit duidelijk. Beschouw nu een situatie waar er n rechten zijn in het vlak met een alternerende 2-kleuring van de gebieden. Voeg nu een rechte l toe. Nu wijzigen we de kleuren van alle gebieden aan de ene kant van



l , die aan de andere kant laten we ongewijzigd. Bovenstaande figuren illustreren de redenering voor de uitbreiding van 3 naar 4 rechten.

Elk lijnsegment dat niet tot l behoort zit nog steeds tussen twee gebieden van verschillende kleur. Elk lijnsegment dat wel tot m behoort snijdt een gebied bepaald door de n rechten in twee, en aangezien we de kleuren aan de ene kant van l gewijzigd hebben zal dit segment ook tussen twee gebieden van verschillende kleur liggen.

Zonder verlies van algemeenheid mogen we veronderstellen dat Turbo op een lijnsegment start met een wit gebied aan de linkerkant en een zwart gebied aan de rechterkant. Als zij rechtsaf slaat bij een snijpunt, blijft het zwarte gebied aan haar rechterkant. Als zij linksaf slaat, blijft het witte gebied aan haar linkerkant. Dus waarheen Turbo ook glijdt, er is steeds een witte tegel aan de linkerkant en een zwarte tegel aan de rechterkant.

Turbo kan dus nooit in twee richtingen over een lijnstukje glijden, want dan zou wit plots aan de rechterkant en zwart aan de linkerkant moeten zitten.

