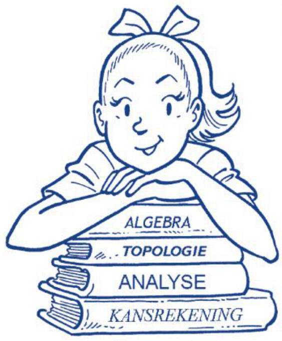
WISKUNNEND WISKE



DE GENIALE GETALLEN

FINALE 2019 - OPDRACHT 3

Opdracht (40 minuten)

Een getal wordt een *narcistisch getal* genoemd als het gelijk is aan de som van zijn eigen cijfers elk verheven tot de macht het aantal cijfers waaruit het getal bestaat.

1. Bewijs dat 153 en 371 narcistische getallen zijn.

2. Geef vijf andere voorbeelden van narcistische getallen.

3. Bewijs dat er slechts een eindig aantal narcistische getallen bestaan.
   Tips:

   - merk op dat een willekeurig getal dat uit n cijfers bestaat, zeker groter dan of gelijk is aan 10^{n-1};
   - gebruik vervolgens (je hoeft dit dus niet te bewijzen) het feit dat de functie $f(x) = 9x(\frac{9}{10})^{x-1}$ dalend is over het interval $[4, +\infty[$ en kleiner wordt dan 1 voor x groot genoeg.

Oplossing

Stelling 1. *Het getal 153 is narcistisch.*

Proof. We moeten nagaan dat de getallen 153 aan de definitie voldoet. De som van elk van zijn cijfers tot de macht het aantal cijfers, moet gelijk zijn aan het getal zelf. Het getal 153 bestaat uit 3 cijfers. Dus de som van elk van die cijfers tot de macht 3, moet gelijk zijn aan het getal zelf. Nu is

$$1^3 + 5^3 + 3^3 = 1 + 125 + 27 = 153\,.$$

Voor het getal 371 geldt exact dezelfde redenering

$$3^3 + 7^3 + 1^3 = 27 + 343 + 1 = 371\,.$$

Beide getallen zijn dus narcistische getallen. □

Het is duidelijk dat de getallen $1, 2, \ldots, 9$ allemaal narcistische getallen zijn.

Stelling 2. *Er zijn slechts een eindig aantal narcistische getallen.*

Proof. Stel dat een getal K bestaat uit n cijfers. Dan is

$$K = \sum_{i=0}^{n-1} a_i 10^i\,.$$

Het cijfer $a_{n-1} \neq 0$, want anders bestond K uit hoogstens $n-1$ cijfers. Dus $10^{n-1} \leq K$. We veronderstellen nu dat K een narcistisch getal is. Dus

$$K = \sum_{i=0}^{n-1} a_i^n \,.$$

Voor de cijfers a_i geldt uiteraard dat $0 \leq a_i \leq 9$. Dus

$$K \leq \sum_{i=0}^{n-1} 9^n = n9^n \,.$$

Dus voor een narcistische getal dat uit precies n cijfers bestaat, geldt

$$10^{n-1} \leq K \leq n9^n \,.$$

Dus als n het aantal cijfers is van een narcistisch getal, dan geldt dus ook dat

$$1 \leq 9n \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} \,.$$

Maar voor n groot genoeg is $9n\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} < 1$ (dit is de tip en gebruiken we zonder het hier te bewijzen). Dus er bestaan geen narcistische getallen met een willekeurig groot aantal cijfers. $\square$