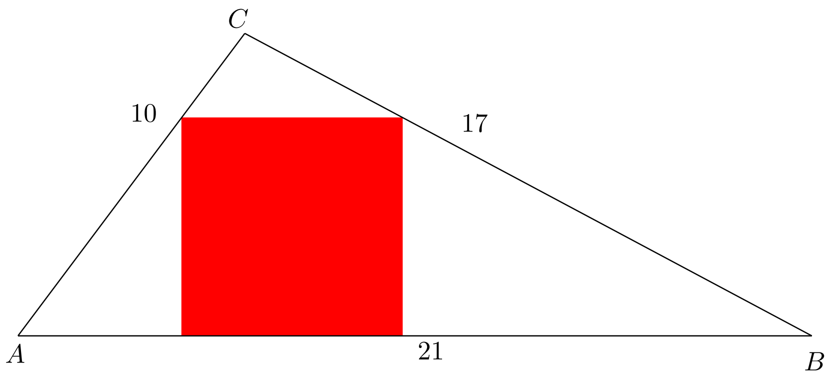
WISKUNNEND WISKE

DE DROMMELSE DRIEHOEK

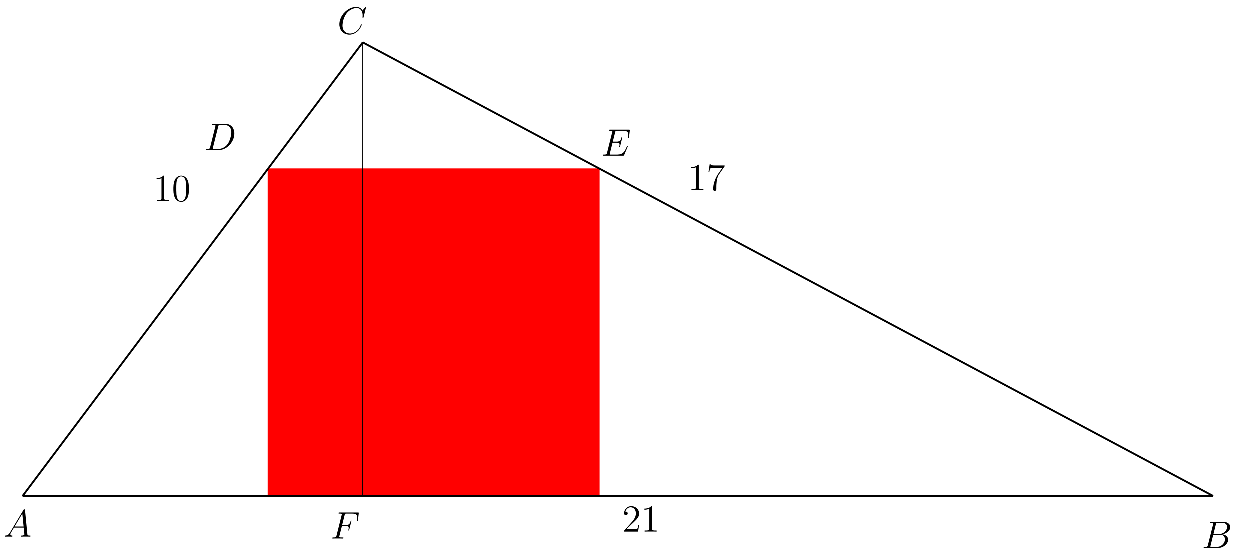
FINALE 2019 - OPDRACHT 4

Opdracht (20 minuten)



Gegeven de driehoek ABC. De lengtes van de zijden $|AB|$, $|BC|$ en $|AC|$ zijn 21, 17 en 10 respectievelijk. Binnen de driehoek hebben we een vierkant, waarvan één van de zijden op de langste driehoekszijde ligt en de twee andere hoekpunten op de twee andere, respectievelijke driehoekszijden liggen. Wat is de lengte van de zijde van het vierkant? Geef ook een bewijs van jullie antwoord.

Oplossing



We berekenen eerst de lengte van de hoogtelijn CF. We gebruiken daarvoor de stelling van Pythagoras in de driehoeken AFC en FBC. We noteren $x = |AF|$ en $h = |CF|$ en z de lengte van de zijde van het vierkant. Dan is, gelet op de gegeven lengtes van de zijden van driehoek ACB

$$|AC|^2 = 10^2 = x^2 + h^2$$

en

$$|EF|^2 = 17^2 = (21 - x)^2 + h^2 \,.$$

Uit deze vergelijkingen volgt gemakkelijk dat $x = 6$ en $h = 8$.
De hoogtelijn vanuit C op de zijde DE heeft lengte $h - z = 8 - z$. Het gelijkvormigheidskenmerk HH (hoek-hoek) impliceert dat de driehoeken DEC en ABC gelijkvormig zijn. Dus de verhoudingen tussen de lengtes van de hoogtelijnen en de lengtes van een paar overeenkomstige zijden is gelijk,

$$\frac{h - z}{h} = \frac{z}{|AB|}$$

dus

$$\frac{8 - z}{8} = \frac{z}{21}$$

waaruit gemakkelijk volgt dat $z = \frac{168}{29}$.