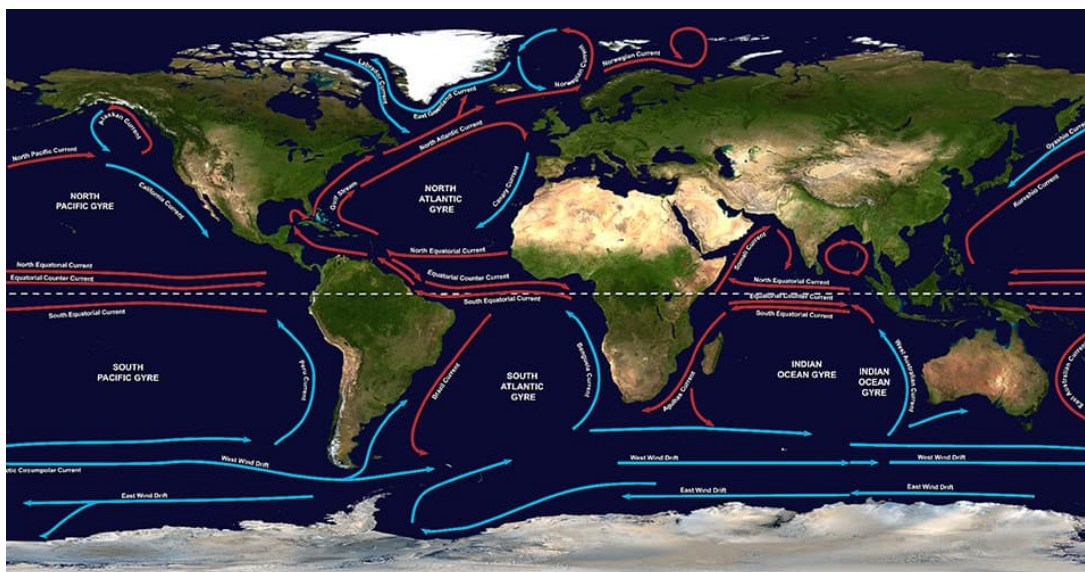
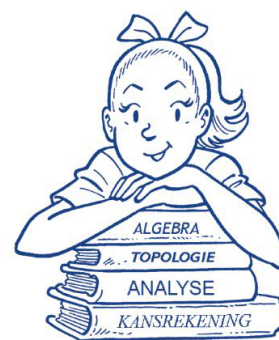


WISKUNNEND WISKE

LAMBIEK PLASTIEK

FINALE 2019 - RODE DRAAD

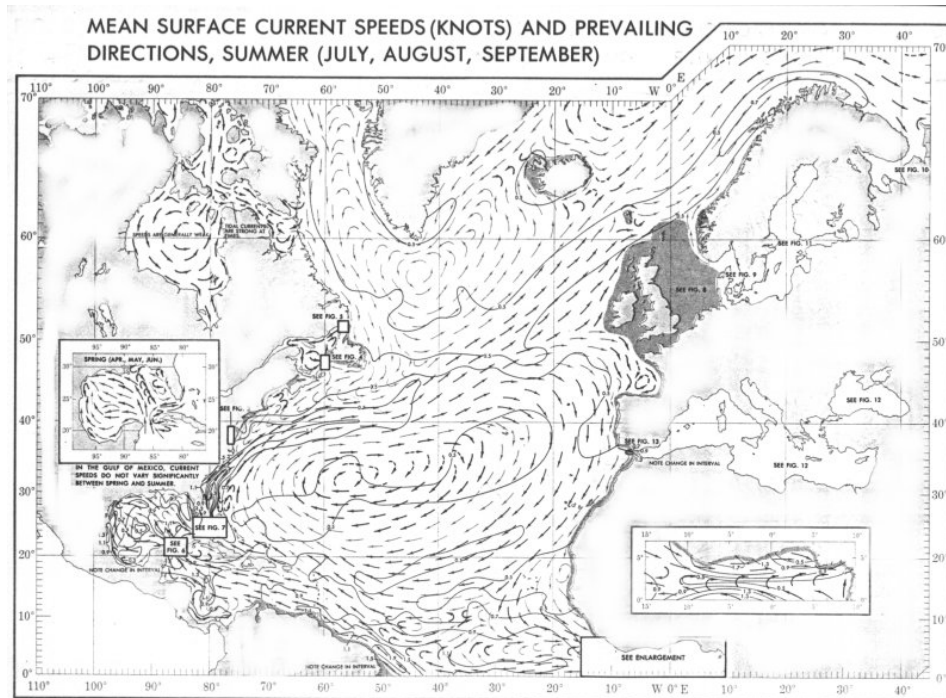


Sinds de jaren '70 zijn wetenschappers bezorgd om de vervuiling van onze oceanen door allerlei plastic afval. De laatste 10 jaar loopt het echt uit de hand en wetenschappers schatten dat er jaarlijks 8 miljoen ton plastic in de oceanen terecht komt. Merkwaardig is dat het afval zich in de oceanen opstapelt op 5 plaatsen. Dit komt natuurlijk door de stromingen die het afval over duizenden kilometers vervoeren.

In deze opdracht zullen jullie onderzoeken hoe stromingen wiskundig kunnen gemodelleerd worden en hoe de modellen kunnen voorspellen waar het plastic afval zich zal opstapelen.

Stromingsdiagrammen

Hieronder zie je een kaart van het Noordelijk deel van de Atlantische Oceaan met pijltjes die de stromingen aanduiden. Zulke kaart is heel nuttig en toont richting en snelheid van de de stromingen aan het wateroppervlak. Hoe langer de pijl, hoe sterker de stroming.

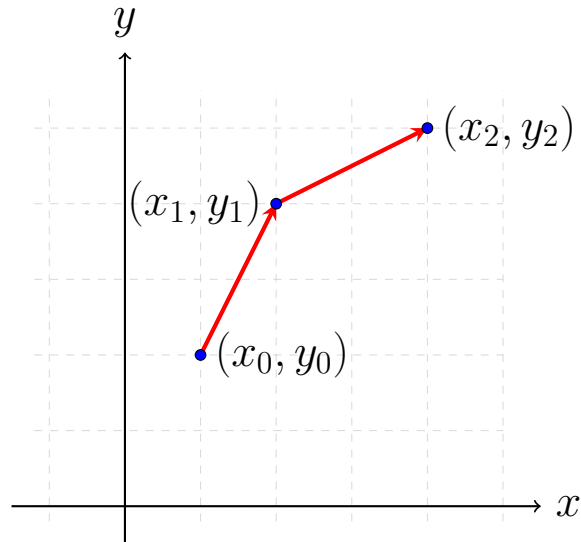


Je ziet op zulke kaart gebieden waar het water snel in een richting stroomt (zoals tussen het Verenigd Koninkrijk en IJsland) en andere gebieden waar het water eerder rond een bepaald punt blijft draaien. Daar gaat plasticafval zich natuurlijk opstapelen en voor een deel ook naar grotere diepte zakken. Stromingen hangen af van seizoenen, wind, zoutgehalte,... Het is niet mogelijk om in deze korte opdracht al deze factoren in rekening te brengen. We zullen een vereenvoudigd model gebruiken.

Een model

Wat betekent een pijl op een stromingsdiagram eigenlijk? Als een pijl start in een punt (x_0, y_0) (van het oceaانvlak, uitgerust met een orthonormale basis) en eindigt in (x_1, y_1) betekent dit dat bijvoorbeeld een plasticdeeltje dat zich op een zeker tijdstip in het punt (x_0, y_0) bevindt, zich

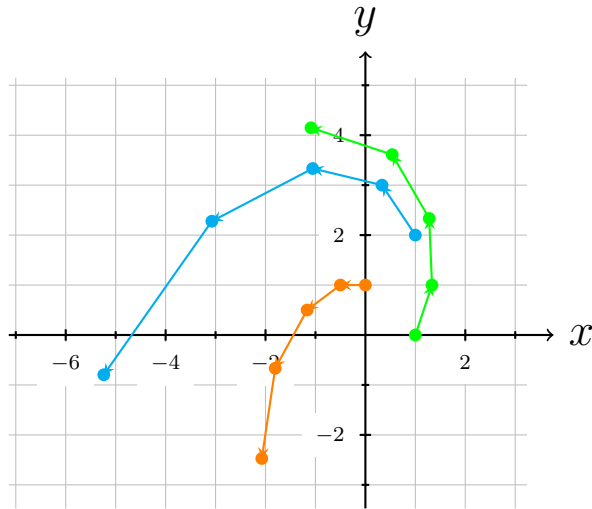
1 tijdseenheid later (bvb, 1 uur later) in het punt (x_1, y_1) zal bevinden. Als we dan de stroming in (x_1, y_1) kennen, kunnen we ook weten waar het plasticdeeltje zich tijdens de volgende tijdseenheid naartoe zal verplaatsen. Dat zal een punt (x_2, y_2) opleveren.



In het model dat we hier beschouwen gaan we veronderstellen dat de stroming in elk punt van het vlak gekend is en dat we van elk plasticdeeltje via een stelsel van lineaire vergelijkingen kunnen zeggen waar het zich na 1 tijdseenheid zal bevinden, in functie van de beginplaats (x_n, y_n) van het deeltje. We noteren de nieuwe plaats van het deeltje (x_{n+1}, y_{n+1}) . Bijvoorbeeld

$$(M) \begin{cases} x_{n+1} = \frac{4}{3}x_n - \frac{1}{2}y_n \\ y_{n+1} = x_n + y_n \end{cases}$$

Door het stelsel (M) meerdere malen toe te passen kunnen we dan de *evolutie* of de *baan* van een plasticdeeltje bepalen. Veronderstel bijvoorbeeld dat een deeltje zich in beginpositie $(x_0, y_0) = (1, 2)$ bevindt. Dan zal het zich na 1 tijdseenheid in het punt $(x_1, y_1) = (\frac{1}{3}, 3)$ bevinden. Nog een tijdseenheid later in $(x_2, y_2) = (-\frac{19}{18}, \frac{10}{3}), \dots$. De baan (over 4 tijdseenheden) van het punt $(1, 2)$ is op onderstaande figuur in het blauw te zien. Er werden ook banen getekend voor twee andere punten.



We stellen vast dat het model (M) ervoor zorgt dat de plasticdeeltjes in een spiraalbeweging van de oorsprong weggestuurd worden.

Eerste opdracht

Gegeven zijn de modellen (M_1) t/m (M_4). Bepaal de banen van enkele punten (minstens 5 verschillende punten, hoogstens 2 per kwadrant, minstens 5 iteraties, je mag het werk verdelen) en stel ze grafisch voor. Vergelijk de vier modellen en noteer je vaststellingen.

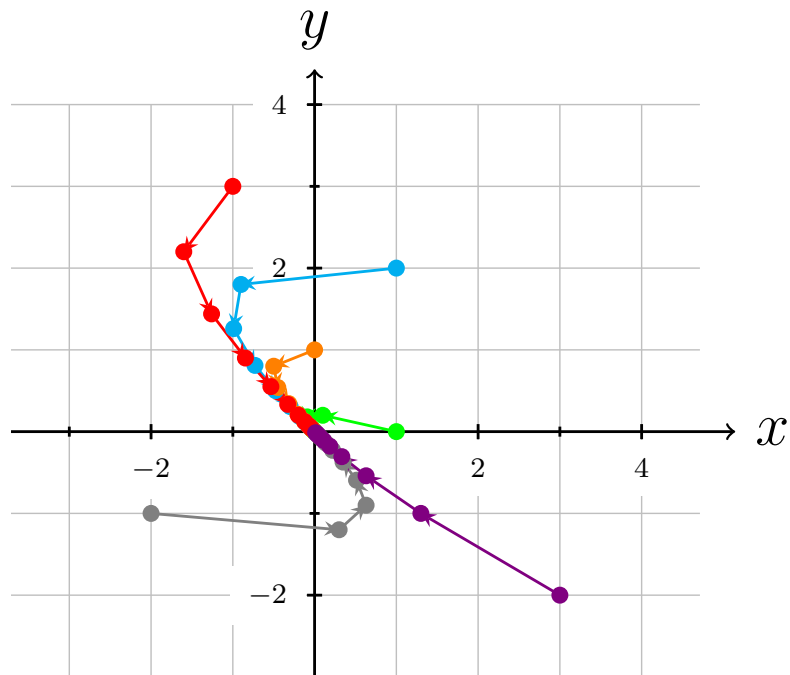
$$(M_1) \begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{10}x_n - \frac{1}{2}y_n \\ y_{n+1} = \frac{1}{5}x_n + \frac{4}{5}y_n \end{cases}$$

$$(M_2) \begin{cases} x_{n+1} = \frac{4}{3}x_n \\ y_{n+1} = \frac{4}{5}y_n \end{cases}$$

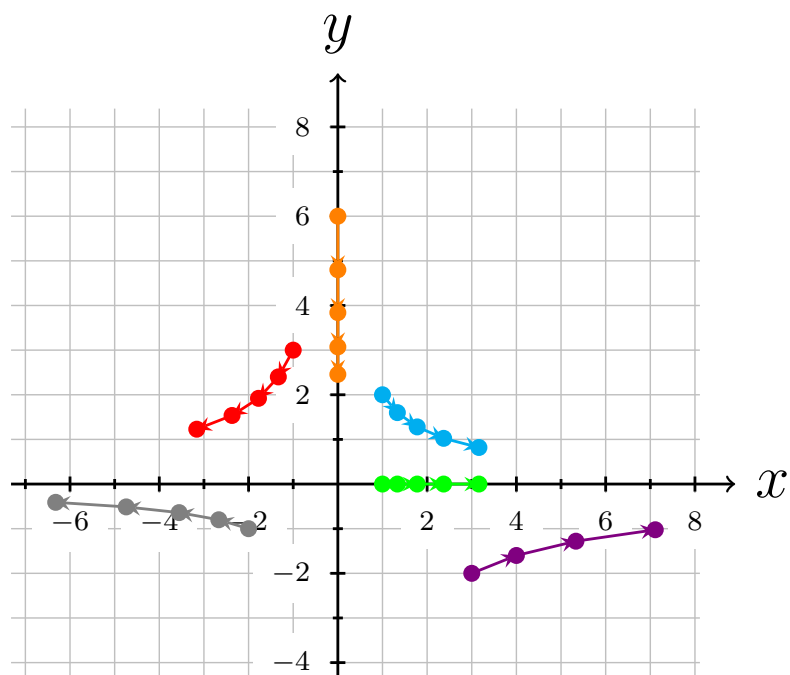
$$(M_3) \begin{cases} x_{n+1} = \frac{4}{5}x_n + \frac{1}{2}y_n \\ y_{n+1} = -\frac{1}{5}x_n + y_n \end{cases}$$

$$(M_4) \begin{cases} x_{n+1} = -y_n \\ y_{n+1} = \frac{4}{5}x_n \end{cases}$$

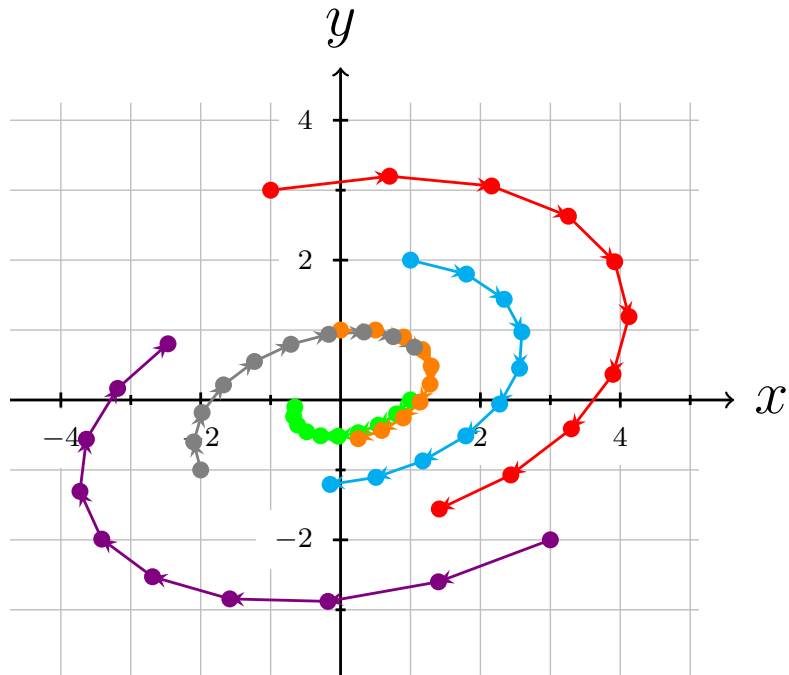
Oplossing eerste opdracht



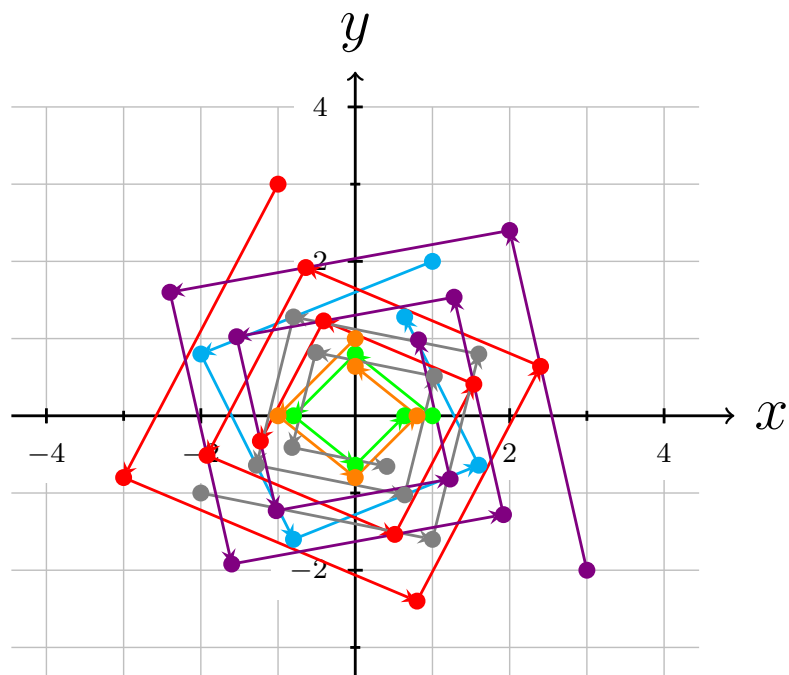
Vaststelling: alle punten convergeren naar de oorsprong.



Vaststelling: De punten op de y -as convergeren naar de oorsprong. Alle andere punten verdwijnen naar (plus of min) oneindig met de x -as als asymptoot.



Vaststelling: De plasticdeeltjes worden in spiraalvormige baan allemaal naar de oorsprong gestuurd.



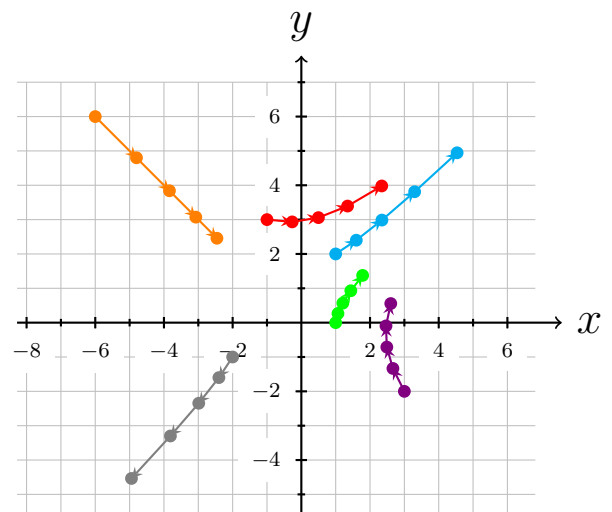
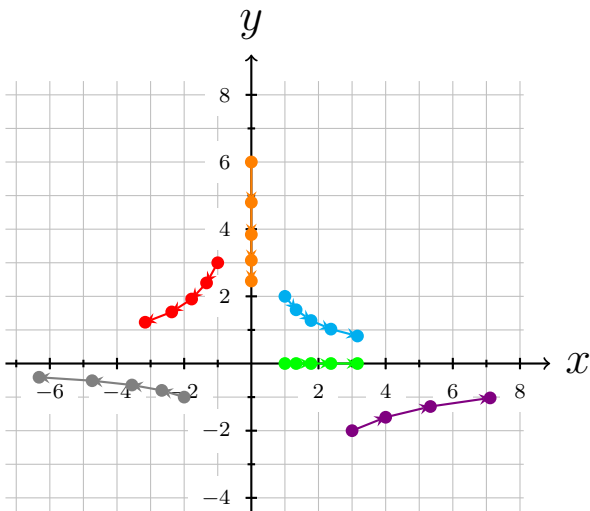
Vaststelling: Hier hebben we ook spiraalvormige banen naar de oorsprong maar de sprongen zijn groter. De plasticdeeltjes convergeren sneller naar de oorsprong.

Tweede opdracht

We bekijken terug het model

$$(M_2) \begin{cases} x_{n+1} = \frac{4}{3}x_n \\ y_{n+1} = \frac{4}{5}y_n \end{cases}$$

De evolutie van dit model is makkelijk te voorspellen omdat voor elk punt (x_0, y_0) bij elke tijdseenheid de x -coördinaat vermenigvuldigd wordt met $\frac{4}{3}$ en de y -coördinaat met $\frac{4}{5}$. Met andere woorden: de x -coördinaat wordt groter en de y -coördinaat krimpt. Nemen we dus een punt op de y -as, dan zal de baan op de y -as blijven en naar het punt $(0, 0)$ convergeren. Een punt op de x -as (zonder $(0, 0)$) daarentegen zal verdwijnen naar oneindig. Voor punten die niet op de assen liggen worden beide effecten gecombineerd en zien we banen volgens hyperbooltakken. Je kan dit zien op de linkse figuur hieronder.



Het model

$$(M'_2) \begin{cases} x_{n+1} = \frac{16}{15}x_n + \frac{4}{15}y_n \\ y_{n+1} = \frac{4}{15}x_n + \frac{16}{15}y_n \end{cases}$$

is hierboven rechts afgebeeld en vertoont gelijkaardige eigenschappen met (M_2) maar de “assen” liggen anders. Je hoeft dit niet via berekeningen na te gaan.

Wat je wel kan nagaan is dat de twee *factoren* ($\frac{4}{3}$ en $\frac{4}{5}$) die we in (M_2) zagen ook aanwezig zijn in (M'_2) , maar “verborgen”. Laat ons kijken naar de coëfficiënten van het stelsel (M_2) . Als we de som van de coëfficiënt van x_n in de eerste vergelijking en de coëfficiënt van y_n in de tweede vergelijking maken, vinden we juist de som $\frac{4}{3} + \frac{4}{5} = \frac{32}{15}$ van de factoren. Als je hetzelfde doet voor (M'_2) , vind je merkwaardig genoeg dezelfde som terug. Het product $\frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{16}{15}$ van de twee factoren kan je ook terugvinden in de coëfficiënten van (M'_2) . Daarvoor bereken je eerst het product van de de coëfficiënt van x_n in de eerste vergelijking en de coëfficiënt van y_n in de tweede vergelijking en daarvan trek je het product van de andere twee coëfficiënten af. Je krijgt

$$\frac{16}{15} \cdot \frac{16}{15} - \frac{4}{15} \cdot \frac{4}{15} = \frac{16}{15}.$$

In het algemeen vinden we voor een model

$$\begin{cases} x_{n+1} = Ax_n + By_n \\ y_{n+1} = Cx_n + Dy_n \end{cases}$$

Dat $A + D$ gelijk is aan de *som* van de twee factoren en dat $AD - BC$ gelijk is aan hun *product*. Je hoeft dit niet te bewijzen.

Vraag: Als je de som en het product van twee reële getallen kent, hoe kan je dan deze getallen terugvinden? Leg uit.