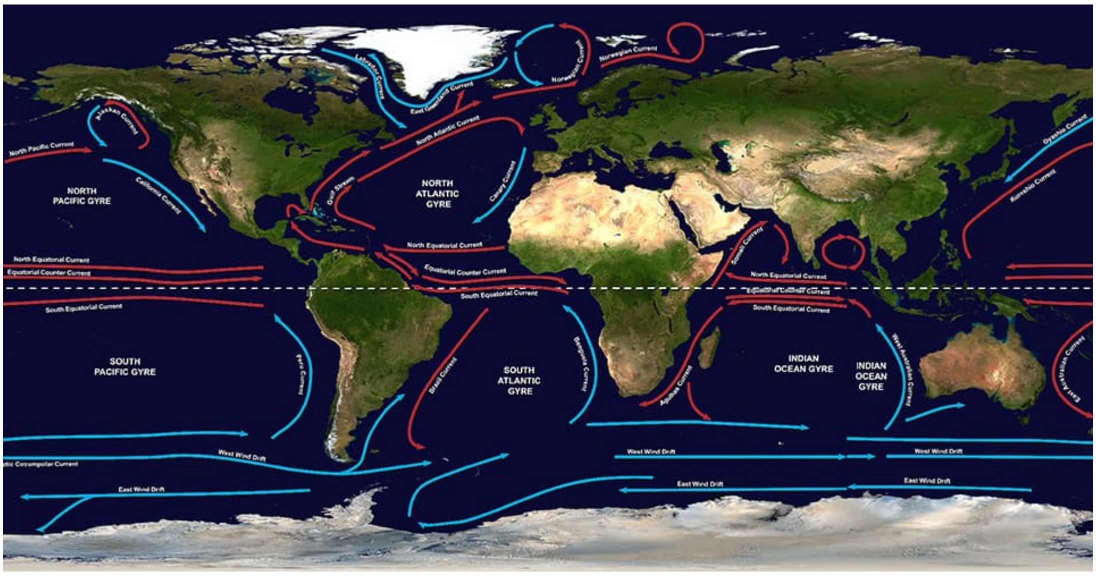
WISKUNNEND WISKE

ALGEBRA
TOPOLOGIE
ANALYSE
KANSREKENING

LAMBIEK PLASTIEK

FINALE 2019 - RODE DRAAD

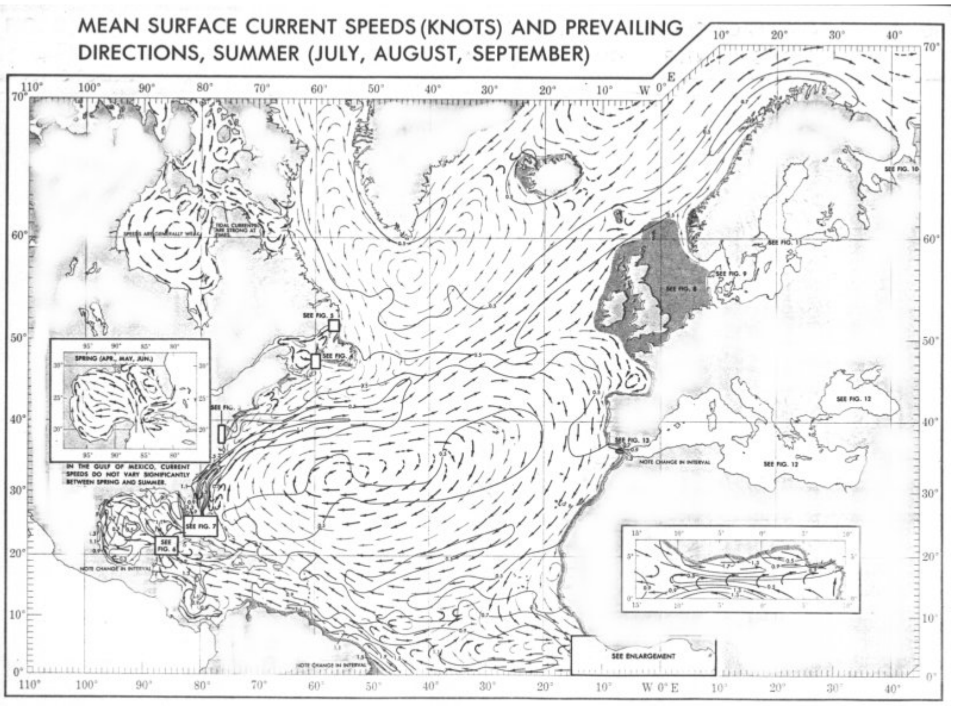


Sinds de jaren '70 zijn wetenschappers bezorgd om de vervuiling van onze oceanen door allerhande plastiek afval. De laatste 10 jaar loopt het echt uit de hand en wetenschappers schatten dat er jaarlijks 8 miljoen ton plastiek in de oceanen terecht komt. Merkwaardig is dat het afval zich in de oceanen opstapelt op 5 plaatsen. Dit komt natuurlijk door de stromingen die het afval over duizenden kilometers vervoeren.

In deze opdracht zullen jullie onderzoeken hoe stromingen wiskundig kunnen gemodelleerd worden en hoe de modellen kunnen voorspellen waar het plastiek afval zich zal opstapelen.

Stromingsdiagrammen

Hieronder zie je een kaart van het Noordelijk deel van de Atlantische Oceaan met pijltjes die de stromingen aanduiden. Zulke kaart is heel nuttig en toont richting en snelheid van de de stromingen aan het wateroppervlak. Hoe langer de pijl, hoe sterker de stroming.

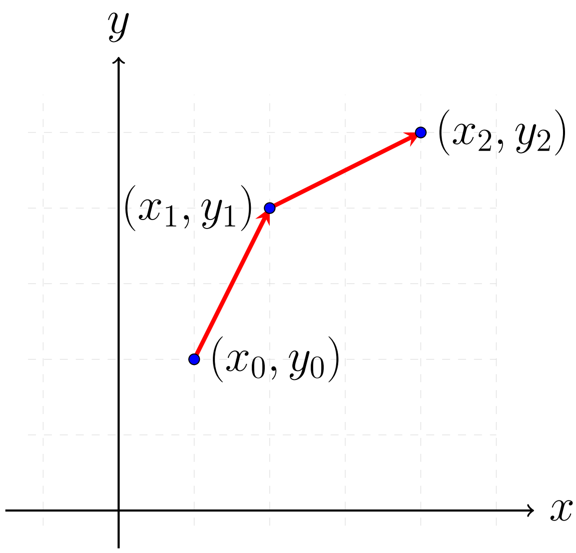


Je ziet op zulke kaart gebieden waar het water snel in een richting stroomt (zoals tussen het Verenigd Koninkrijk en Ijsland) en andere gebieden waar het water eerder rond een bepaald punt blijft draaien. Daar gaat plastiekafval zich natuurlijk opstapelen en voor een deel ook naar grotere diepte zakken. Stromingen hangen af van seizoenen, wind, zoutgehalte,... Het is niet mogelijk om in deze korte opdracht al deze factoren in rekening te brengen. We zullen een vereenvoudigd model gebruiken.

Een model

Wat betekent een pijl op een stromingsdiagram eigenlijk? Als een pijl start in een punt (x_0, y_0) (van het oceaanvlak, uitgerust met een orthonormale basis) en eindigt in (x_1, y_1) betekent dit dat bijvoorbeeld een plastiekdeeltje dat zich op een zeker tijdstip in het punt (x_0, y_0) bevindt, zich

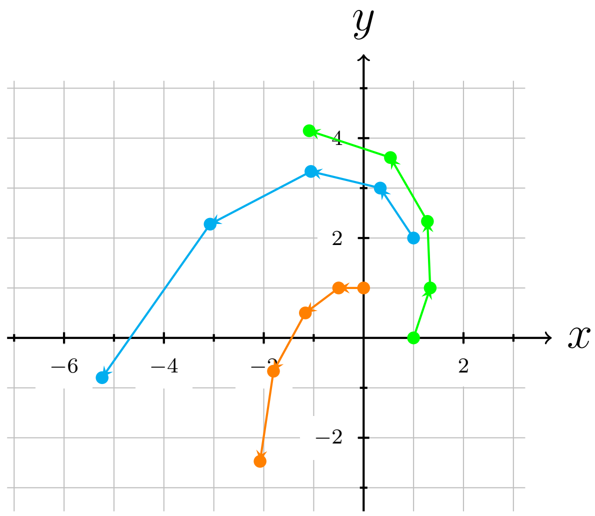
1 tijdseenheid later (bvb, 1 uur later) in het punt (x_1, y_1) zal bevinden. Als we dan de stroming in (x_1, y_1) kennen, kunnen we ook weten waar het plastiekdeeltje zich tijdens de volgende tijdseenheid naartoe zal verplaatsen. Dat zal een punt (x_2, y_2) opleveren.



In het model dat we hier beschouwen gaan we veronderstellen dat de stroming in elk punt van het vlak gekend is en dat we van elk plastiekdeeltje via een stelsel van lineaire vergelijkingen kunnen zeggen waar het zich na 1 tijdseenheid zal bevinden, in functie van de beginplaats (x_n, y_n) van het deeltje. We noteren de nieuwe plaats van het deeltje (x_{n+1}, y_{n+1}). Bijvoorbeeld

$$(M)\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{4}{3}x_n - \dfrac{1}{2}y_n \\ y_{n+1} = x_n + y_n \end{cases}$$

Door het stelsel (M) meerdere malen toe te passen kunnen we dan de *evolutie* of de *baan* van een plastiekdeeltje bepalen. Veronderstel bijvoorbeeld dat een deeltje zich in beginpositie $(x_0, y_0) = (1, 2)$ bevindt. Dan zal het zich na 1 tijdseenheid in het punt $(x_1, y_1) = (\frac{1}{3}, 3)$ bevinden. Nog een tijdseenheid later in $(x_2, y_2) = (-\frac{19}{18}, \frac{10}{3}), \ldots$ De baan (over 4 tijdseenheden) van het punt $(1, 2)$ is op onderstaande figuur in het blauw te zien. Er werden ook banen getekend voor twee andere punten.



We stellen vast dat het model (M) ervoor zorgt dat de plastiekdeeltjes in een spiraalbeweging van de oorsprong weggestuurd worden.

Eerste opdracht

Gegeven zijn de modellen (M_1) t/m (M_4). Bepaal de banen van enkele punten (minstens 5 verschillende punten, hoogstens 2 per kwadrant, minstens 5 iteraties, je mag het werk verdelen) en stel ze grafisch voor. Vergelijk de vier modellen en noteer je vaststellingen.

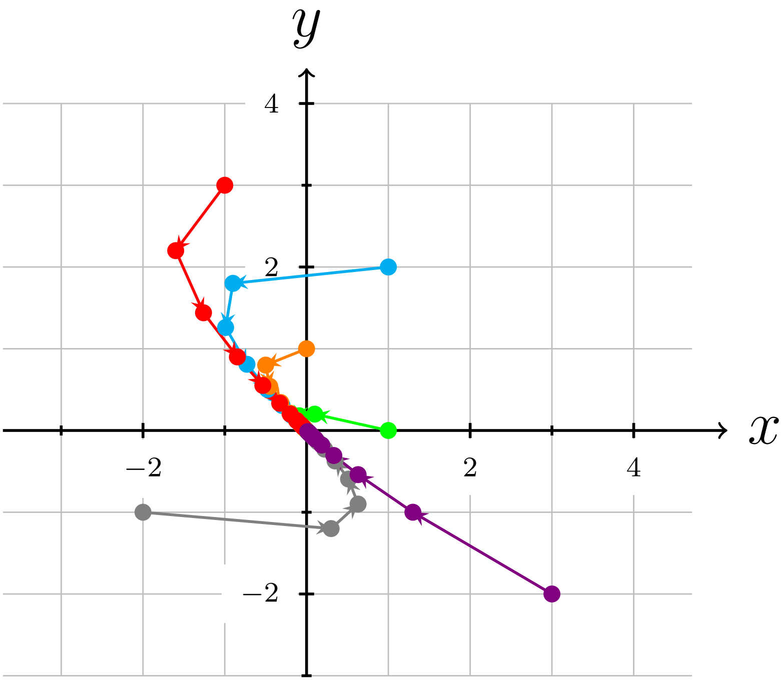
$$(M_1)\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{10}x_n - \frac{1}{2}y_n \\ y_{n+1} = \frac{1}{5}x_n + \frac{4}{5}y_n \end{cases}$$

$$(M_2)\begin{cases} x_{n+1} = \frac{4}{3}x_n \\ y_{n+1} = \frac{4}{5}y_n \end{cases}$$

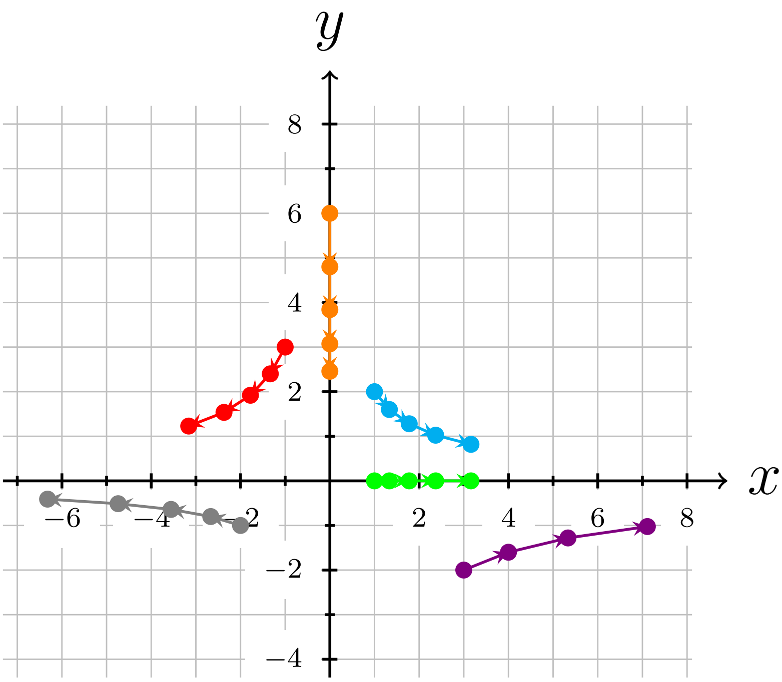
$$(M_3)\begin{cases} x_{n+1} = \frac{4}{5}x_n + \frac{1}{2}y_n \\ y_{n+1} = -\frac{1}{5}x_n + y_n \end{cases}$$

$$(M_4)\begin{cases} x_{n+1} = -y_n \\ y_{n+1} = \frac{4}{5}x_n \end{cases}$$

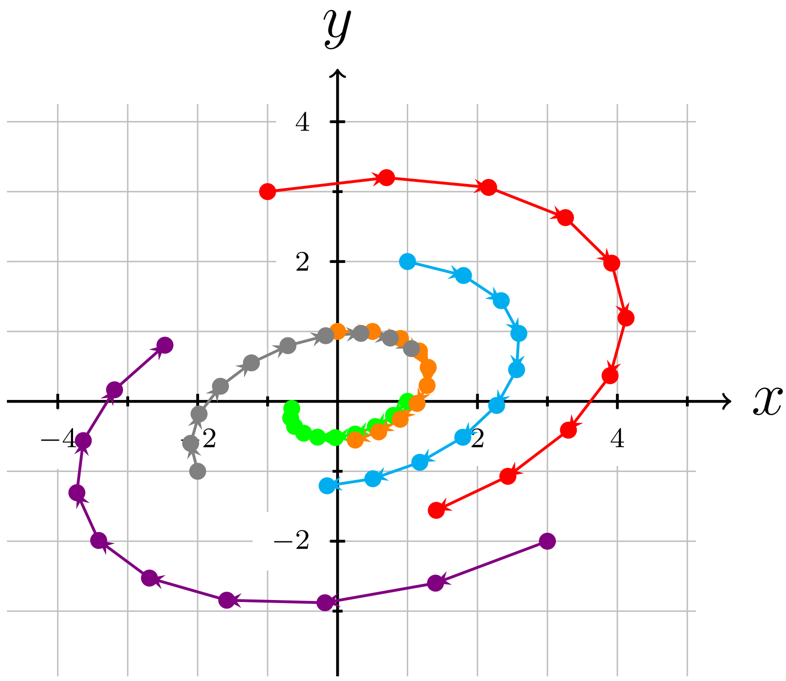
Oplossing eerste opdracht



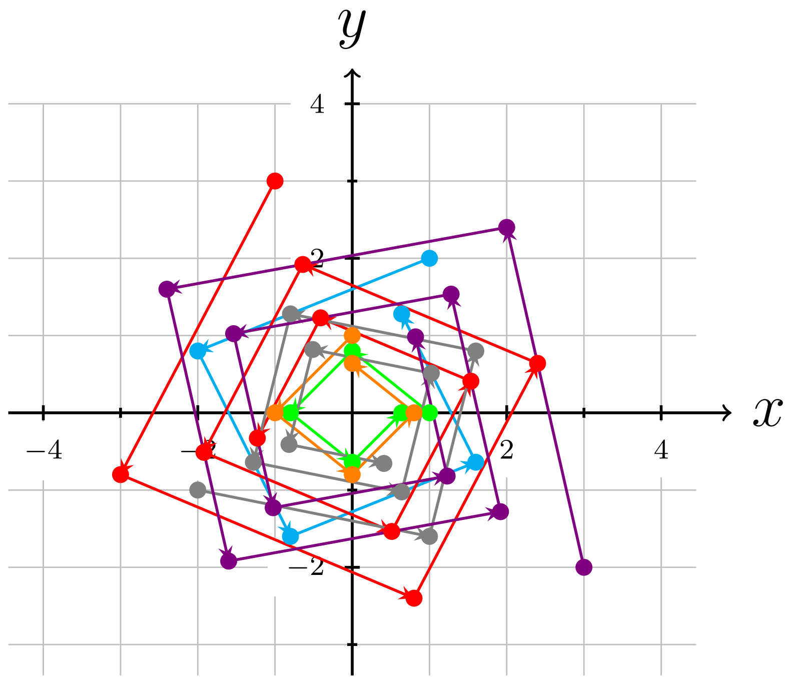
Vaststelling: alle punten convergeren naar de oorsprong.



Vaststelling: De punten op de y-as convergeren naar de oorsprong. Alle andere punten verdwijnen naar (plus of min) oneindig met de x-as als asymptoot.



Vaststelling: De plastiekdeeltjes worden in spiraalvormige baan allemaal naar de oorsprong gestuurd.



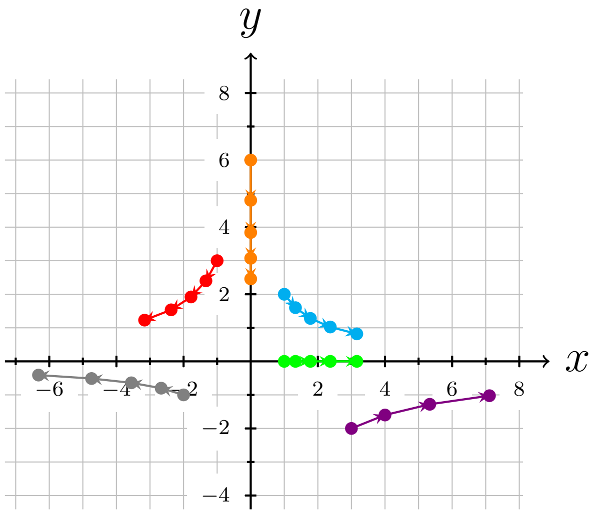
Vaststelling: Hier hebben we ook spiraalvormige banen naar de oorsprong maar de sprongen zijn groter. De plastiekdeeltjes convergeren sneller naar de oorsprong.

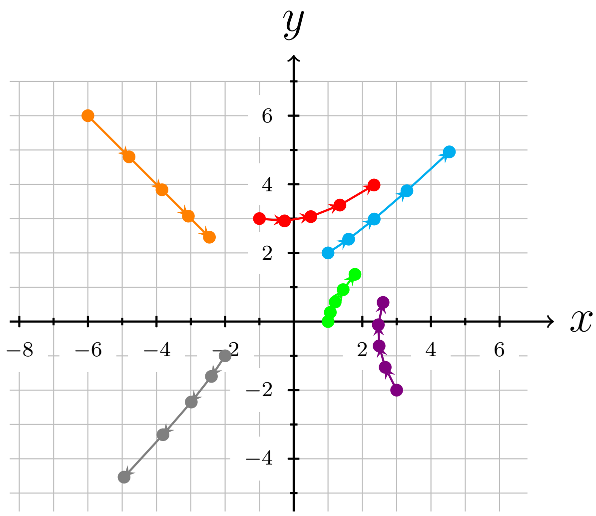
Tweede opdracht

We bekijken terug het model

$$(M_2)\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{4}{3}x_n \\ y_{n+1} = \dfrac{4}{5}y_n \end{cases}$$

De evolutie van dit model is makkelijk te voorspellen omdat voor elk punt (x_0, y_0) bij elke tijdseenheid de x-coördinaat vermenigvuldigd wordt met $\frac{4}{3}$ en de y-coördinaat met $\frac{4}{5}$. Met andere woorden: de x-coördinaat wordt groter en de y-coördinaat krimpt. Nemen we dus een punt op de y-as, dan zal de baan op de y-as blijven en naar het punt $(0,0)$ convergeren. Een punt op de x-as (zonder $(0,0)$) daarentegen zal verdwijnen naar oneindig. Voor punten die niet op de assen liggen worden beide effecten gecombineerd en zien we banen volgens hyperbooltakken. Je kan dit zien op de linkse figuur hieronder.





Het model

$$(M_2')\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{16}{15}x_n + \dfrac{4}{15}y_n \\ y_{n+1} = \dfrac{4}{15}x_n + \dfrac{16}{15}y_n \end{cases}$$

is hierboven rechts afgebeeld en vertoont gelijkaardige eigenschappen met (M_2) maar de “assen” liggen anders. Je hoeft dit niet via berekeningen na te gaan.

Wat je wel kan nagaan is dat de twee *factoren* ($\frac{4}{3}$ en $\frac{4}{5}$) die we in (M_2) zagen ook aanwezig zijn in (M_2'), maar "verborgen". Laat ons kijken naar de coëfficiënten van het stelsel (M_2). Als we de som van de coëfficiënt van x_n in de eerste vergelijking en de coëfficiënt van y_n in de tweede vergelijking maken, vinden we juist de som $\frac{4}{3}+\frac{4}{5}=\frac{32}{15}$ van de factoren. Als je hetzelfde doet voor (M_2'), vind je merkwaardig genoeg dezelfde som terug. Het product $\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{16}{15}$ van de twee factoren kan je ook terugvinden in de coëfficiënten van (M_2'). Daarvoor bereken je eerst het product van de de coëfficiënt van x_n in de eerste vergelijking en de coëfficiënt van y_n in de tweede vergelijking en daarvan trek je het product van de andere twee coëfficiënten af. Je krijgt

$$\frac{16}{15}\cdot\frac{16}{15}-\frac{4}{15}\cdot\frac{4}{15}=\frac{16}{15}.$$

In het algemeen vinden we voor een model

$$\begin{cases} x_{n+1} = Ax_n + By_n \\ y_{n+1} = Cx_n + Dy_n \end{cases}$$

Dat $A+D$ gelijk is aan de *som* van de twee factoren en dat $AD-BC$ gelijk is aan hun *product*. Je hoeft dit niet te bewijzen.

Vraag: Als je de som en het product van twee reële getallen kent, hoe kan je dan deze getallen terugvinden? Leg uit.

Oplossing tweede opdracht

Gegeven zijn twee reële getallen S en P die respectievelijk de *som* en het *product* van twee reële getallen f_1 en f_2 zijn. Hoe vind je f_1 en f_2 terug uit S en P?
Er zijn (op zijn minst) twee methodes, die op hetzelfde neerkomen.

Methode 1

Bij uitwerken van het product $(x - f_1)(x - f_2)$ van veeltermen vinden we $x^2 - (f_1 + f_2)x + f_1 f_2$. Dat is natuurlijk de veelterm $x^2 - Sx + P$. We kunnen dus f_1 en f_2 terugvinden als wortels van de veelterm $x^2 - Sx + P$ of dus door een eenvoudige vierkantsvergelijking op te lossen.

Methode 2

We hebben $S = f_1 + f_2$ en $P = f_1 f_2$. Als we ervan uitgaan dat $f_2 \neq 0$, kunnen we stellen dat $f_1 = P/f_2$. Substitutie in de vergelijking voor S geeft

$$S = P/f_2 + f_2.$$

Als we beide leden vermenigvuldigen met f_2 vinden we een vierkantsvergelijking voor f_2:

$$f_2^2 - S f_2 + P = 0,$$

Dezelfde vierkantsvergelijking als in Methode 1. Merk op dat de andere wortel van de vierkantsvergelijking f_1 zal zijn.
Hoe kunnen we weten dat $f_2 \neq 0$? Als $P \neq 0$, weten we dat zowel f_1 als f_2 niet nul is en is er geen probleem. Als $P = 0$ zou het kunnen dat f_2 nul is of dat f_1 nul is of allebei. Als ze allebei nul zijn, is ook S nul en kunnen we meteen zeggen dat $f_1 = f_2 = 0$. Als de som niet nul is, is f_1 of f_2 niet nul. In beide gevallen vinden we dezelfde vierkantsvergelijking.

Derde opdracht

Bereken de factoren van

$$(M_1)\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{1}{10}x_n - \dfrac{1}{2}y_n \\ y_{n+1} = \dfrac{1}{5}x_n + \dfrac{4}{5}y_n \end{cases} \qquad (M_2)\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{4}{3}x_n \\ y_{n+1} = \dfrac{4}{5}y_n \end{cases}$$

$$(M_3)\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{4}{5}x_n + \dfrac{1}{2}y_n \\ y_{n+1} = -\dfrac{1}{5}x_n + y_n \end{cases} \qquad (M_4)\begin{cases} x_{n+1} = -y_n \\ y_{n+1} = \dfrac{4}{5}x_n \end{cases}$$

Kan je hiermee beter de evolutie van deze vier modellen verklaren?
We noemen de twee factoren van een gegeven model f_1 en f_2 en zorgen er voor dat $f_1 \leq f_2$. Vul onderstaande tabel aan:

f_1 en f_2	evolutie van het model
$0 < f_1 \leq f_2 < 1$	
$0 < f_1 < f_2 = 1$	
$-1 < f_1 < 0 < f_2 < 1$	
$1 < f_1 \leq f_2$	Alle punten gaan naar oneindig
$f_1 < -1$ en $f_2 > 1$	
f_1 en f_2 bestaan niet (in $\mathbb{R}$)	