

# Wiskunnend Wiske: opdracht 2

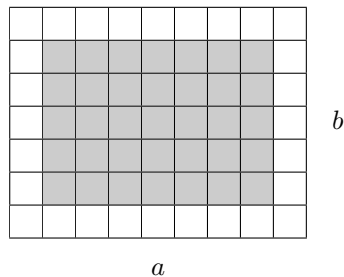
campus de helix Maasmechelen  
seminarie wiskunde

November 2018

We zullen in het volgende trachten een algemene formule op te stellen voor het gemiddeld aantal gevaarlijke cellen  $A$  (cellen die zelf geen mijn bevatten en waarvan exact  $m$  ( $m \geq 6$ ) aanliggende cellen een mijn bevatten) waarbij we een veld met afmetingen  $a \times b$  en een situatie met  $n$  mijnen beschouwen. Dit is namelijk de verhouding tussen het totaal aantal gevaarlijke cellen over alle mogelijke constellaties heen, en het totaal aantal mogelijkheden om de mijnen willekeurig te verdelen:

$$A = \frac{\#G}{\#U} = \frac{\#\text{gevaarlijke cellen}}{\#\text{mogelijke verdelingen}}$$

We schrijven nu eerst  $\#\text{gevaarlijke cellen}$  in functie van  $m$ ,  $n$ ,  $a$  en  $b$ . Omdat  $m \geq 6$ , kan een gevaarlijke cel nooit aan de rand van het veld liggen. In een veld met afmetingen  $a \times b$  zijn er dus  $(a-2)(b-2)$  cellen die een gevaarlijke cel kunnen zijn.



Bij elk van deze cellen kunnen de  $m$  mijnen die rond deze cel moeten liggen op  $C_8^m = \frac{8!}{m!(8-m)!}$  manieren verdeeld worden over de 8 aanliggende cellen.

Vervolgens kunnen de overblijvende  $n - m$  mijnen nog verdeeld worden over de andere  $ab - 9$  cellen van het veld (alle cellen behalve de gevaarlijke cel en haar 8 buurcellen). Dit kan op precies  $C_{ab-9}^{n-m} = \frac{(ab-9)!}{(n-m)!(ab-9-n+m)!}$  manieren.

We kunnen dus concluderen dat:

$$\#\text{gevaarlijke cellen} = (a-2)(b-2) \cdot C_8^m \cdot C_{ab-9}^{n-m}$$

Nu schrijven we ook # mogelijke verdelingen in functie van  $a, b$  en  $n$ . Gezien er  $ab$  mogelijkheden zijn (alle cellen van het veld) en  $n$  mijnen te verdelen, wordt dit gegeven door de formule:

$$\# \text{mogelijke verdelingen} = C_{ab}^n$$

Zo bekomen we dat voor alle  $a, b, n, m \in \mathbb{N}$  ( $a, b \geq 3$ ;  $m \geq 6$ ;  $n \geq m$ ), geldt dat:

$$A = \frac{(a-2)(b-2) \cdot C_8^m \cdot C_{ab-9}^{n-m}}{C_{ab}^n}$$

Voor de gevraagde gevallen krijgen we dan:

**a)**

$$\begin{array}{l} a = 10 \quad n = 16 \\ b = 6 \quad m = 7 \end{array} \quad A = \frac{(10-2)(6-2) \cdot C_8^7 \cdot C_{10 \cdot 6 - 9}^{16-7}}{C_{6 \cdot 10}^{16}} \approx 5,2058045 \cdot 10^{-3}$$

$$\begin{array}{l} a = 10 \quad n = 16 \\ b = 6 \quad m = 8 \end{array} \quad A = \frac{(10-2)(6-2) \cdot C_8^8 \cdot C_{10 \cdot 6 - 9}^{16-8}}{C_{6 \cdot 10}^{16}} \approx 1,361983745 \cdot 10^{-4}$$

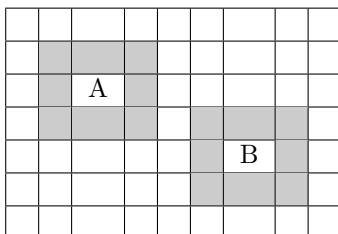
**b)**

$$\begin{array}{l} a = 20 \quad n = 32 \\ b = 6 \quad m = 7 \end{array} \quad A = \frac{(20-2)(6-2) \cdot C_8^7 \cdot C_{20 \cdot 6 - 9}^{32-7}}{C_{6 \cdot 20}^{32}} \approx 1,97150214 \cdot 10^{-2}$$

$$\begin{array}{l} a = 20 \quad n = 32 \\ b = 6 \quad m = 8 \end{array} \quad A = \frac{(20-2)(6-2) \cdot C_8^8 \cdot C_{20 \cdot 6 - 9}^{32-8}}{C_{6 \cdot 20}^{32}} \approx 7,081545044 \cdot 10^{-4}$$

NOOT: merk op dat telkens als er twee of meer gevaarlijke cellen tegelijkertijd voorkomen, deze situatie ook evenveel keer geteld wordt in de formule, zoals het hoort bij een gemiddelde.

vb.:



Deze situatie wordt twee keer geteld, één keer als gevaarlijke cel  $A$ , met een willekeurige verdeling van de overige mijnen (die in dit geval een gevaarlijke cel vormen), en één keer als gevaarlijke cel  $B$ , met een willekeurige verdeling van de overige mijnen (die opnieuw een gevaarlijke cel vormen).