Dimensies, eenheden en de Maxwell vergelijkingen

Alexander Sevrin

1 Inleiding

De keuze van dimensies en eenheden in het elektromagnetisme is ver van eenduidig. Hoewel het SI systeem één en ander ondubbelzinnig vastgelegd heeft, blijven andere systemen wijd verspreid. Men heeft naast het SI systeem ook het Gaussische, het Heaviside-Lorentz, het elektrostatische (esu) en het elektromagnetische (emu) systeem. Daarenboven bestaan er nog diverse "dialecten" of varianten van deze systemen. De Gaussische en de Heaviside-Lorentz systemen zijn nauw met elkaar verbonden. Evenzeer zijn de SI, de esu en de emu systemen gerelateerd. In de praktijk wordt de student fysica (zeker die aan de VUB) tegenwoordig met "slechts" twee stelsels geconfronteerd:

- Heaviside-Lorentz: wordt gebruikt in essentieel *alle* handboeken en wetenschappelijke publicaties in de elementaire deeltjesfysica, algemene relativiteit en wiskundige natuurkunde. Zelfs het standaardwerk bij uitstek over het elektromagnetisme, [1], gebruikt Gaussische eenheden (op enkele herschalingen met factoren 4π na is deze identiek aan het Heaviside-Lorentz systeem). Ruwweg kan men dus stellen dat het Heaviside-Lorentz stelsel de voorkeur geniet wanneer men microscopische fysische verschijnselen bestudeert.

- SI: wordt tegenwoordig in zowat alle andere toepassingen (b.v. vaste stoffysica, optica, ...) aangewend. Dit is dus het stelsel dat bij voorkeur gebruikt wordt bij de studie van macroscopische fysische verschijnselen.

In deze nota's zullen beiden gepresenteerd worden. Ik beperk mij hier tot de Maxwell vergelijkingen in het vacuum. Voor de Maxwell vergelijkingen in willekeurige media verwijs ik opnieuw naar de "bijbel": [1]. Daar vindt men ook alle details met betrekking tot andere stelsels. Ik ga ervan uit dat de lezer al goed vertrouwd is met de Maxwell vergelijkingen.

2 Algemene beschouwingen

2.1 Maxwell in het vacuum zonder bronnen

Beschouwen we de Maxwell vergelijkingen in het vacuum in *afwezigheid* van bronnen,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{B} &= 0, && (1) \\ \nabla \times \vec{E} &= -a_1 \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, && (2) \\ \nabla \cdot \vec{E} &= 0, && (3) \\ \nabla \times \vec{B} &= a_2 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, && (4) \end{aligned}$$

met $a_1,\ a_2 \in \mathbb{R}$ twee vooralsnog onbepaalde coëfficiënten. We nemen de rotor van vgl. (2),

$$\nabla \times \left(\nabla \times \vec{E} \right) = -a_1 \nabla \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \tag{5}$$

Met behulp van de standaard identiteit,

$$\nabla \times \left(\nabla \times \vec{A} \right) = \nabla \left(\nabla \cdot \vec{A} \right) - \Delta \vec{A}, \tag{6}$$

en vgl. (3) wordt dit,

$$\Delta \vec{E} = a_1 \nabla \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \tag{7}$$

Vervolgens leiden we vgl. (4) af naar de tijd,

$$\nabla \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = a_2 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \tag{8}$$

Combineren we dit met vgl. (7), dan krijgen we uiteindelijk,

$$\Delta \vec{E} - a_1 a_2 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \tag{9}$$

Eisen we nu dat de golven zich met de lichtsnelheid (in het vacuum), c, verplaatsen, dan krijgen we,

$$a_1 a_2 = c^{-2}, \tag{10}$$

of nog,

$$a_2 = \frac{1}{c^2 a_1}. \tag{11}$$

Een analoge vergelijking voor $\vec{B}$ kan afgeleid worden die echter geen verdere voorwaarden oplevert.

2.2 Maxwell in het vacuum met bronnen

Vervolgens beschouwen de Maxwell vergelijkingen in het vacuum maar in aanwezigheid van externe bronnen gekarakteriseerd door een ladingsdichtheid ρ en een stroomsterktedichtheid $\vec{\jmath}$ die aan de continuïteitsvergelijking voldoen,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{\jmath} = 0. \tag{12}$$

Gebruik makend van de resultaten uit het voorafgaand hoofdstukje, hebben we nu voor de Maxwell vergelijkingen,

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{B} &= 0, & (13)\\
\nabla \times \vec{E} &= -a_1 \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, & (14)\\
\nabla \cdot \vec{E} &= b_1 \rho, & (15)\\
\nabla \times \vec{B} &= b_2 \vec{\jmath} + \frac{1}{c^2 a_1} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, & (16)
\end{aligned}$$

met a_1, b_1 en $b_2 \in \mathbb{R}$ drie vooralsnog onbepaalde coëfficiënten. Combineren we de divergentie van vgl. (16) – waarbij we van $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) = 0$ gebruik maken – met de afgeleide naar de tijd van vgl. (15), dan krijgen we,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{c^2 a_1 b_2}{b_1} \nabla \cdot \vec{\jmath} = 0. \tag{17}$$

Vergelijken we (17) met (12) dan bekomen we,

$$b_1 = c^2 a_1 b_2, \tag{18}$$

waarmee de Maxwell vergelijkingen nu gegeven worden door,

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{B} &= 0, & (19)\\
\nabla \times \vec{E} &= -a_1 \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, & (20)\\
\nabla \cdot \vec{E} &= c^2 a_1 b_2 \rho, & (21)\\
\nabla \times \vec{B} &= b_2 \vec{\jmath} + \frac{1}{c^2 a_1} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, & (22)
\end{aligned}$$

met a_1 en $b_2 \in \mathbb{R}$ twee nog steeds onbepaalde coëfficiënten.

Hoewel we – gezien we hier in het vacuum werken – niet direct baat hebben bij de introductie van de macroscopische velden $\vec{D}$ (de elektrische verplaatsing) en $\vec{H}$ (het magnetisch veld), geven we toch hun relatie met $\vec{E}$ (het elektrisch veld) en $\vec{B}$ (de magnetische inductie)[1],

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \epsilon_0 \vec{E} \\ \vec{H} &= \frac{1}{\mu_0}\vec{B}.\end{aligned} \tag{23}$$

met ϵ_0 de elektrische permittiviteit en μ_0 de magnetische permeabiliteit van het vacuum.

3 Keuzes...

3.1 Inleidende beschouwingen

Met algemene eisen zoals het feit dat vrije elektromagnetische golven zich met de lichtsnelheid voortplanten en het feit dat ladings- en stroomsterktedichtheid aan de continuïteitsvergelijking moeten voldoen kunnen we de Maxwell vergelijkingen op twee constantes na bepalen. Om deze eveneens vast te leggen zullen we keuzes *moeten* maken! Deze keuzes zullen dan de dimensies van $\vec{E}$, $\vec{B}$ en elektrische lading vastleggen. In het bijzonder legt de keuze van a_1 de relatieve dimensie van $\vec{E}$ ten opzichte van $\vec{B}$ vast. De definitie/keuze van b_2 is dan weer nauw verbonden met de definitie van lading (of stroom).

Uit vgl. (21) volgt dat het elektrisch veld $\vec{E}_c$ opgewekt door een statische puntlading q gelokaliseerd in de oorsprong, gegeven wordt door,

$$\vec{E}_c(\vec{r}) = \frac{c^2 a_1 b_2}{4\pi}\frac{q\,\vec{r}}{r^3}. \tag{24}$$

De kracht, $\vec{F}_c$, die een puntlading q' met plaatsvector $\vec{r}$ ten gevolge hiervan ondervindt is gegeven door de wet van Coulomb die in alle systemen dezelfde vorm aanneemt,

$$\vec{F}_c(\vec{r}) = q'\,\vec{E}_c(\vec{r}). \tag{25}$$

Hieruit lezen we af dat de dimensie van het elektrisch veld zal afhangen van de dimensie van de lading. Eveneens is zowel de dimensie als de grootte van $a_1 b_2$ afhankelijk van de gekozen dimensie en eenheid voor de elektrische lading.

Beschouw nu twee oneindig lange evenwijdige rechte draden die zich op een afstand r van elkaar bevinden. Door de ene draad loopt een elektrische stroom I_1, door de andere een stroom I_2. Volgens Ampère is de kracht per lengteëenheid tussen de twee draden gegeven door,

$$\frac{dF_a}{dl} \propto \frac{I_1 I_2}{r}. \tag{26}$$

[1] Alle uitdrukkingen zijn enkel geldig in het vacuum!

Experimenteel vindt men dat de evenredigheidsconstante (nog steeds in het vacuum) gerelateerd is met deze in de wet van Coulomb,

$$\frac{dF_a}{dl} = \frac{a_1 b_2}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{r}. \tag{27}$$

De (grootte van de) magnetische inductie is gedefinieerd als zijnde evenredig aan de kracht per stroomsterkte eenheid die de tweede draad voelt tengevolge van de eerste draad,

$$B = \frac{\beta\, a_1 b_2}{2\pi}\frac{I_1}{r}, \tag{28}$$

met β een, eventueel dimensievolle, evenredigheidsconstante. Vergelijken we dit met vgl. (22), dan krijgen we,

$$\beta = \frac{1}{a_1}. \tag{29}$$

3.2 Het SI stelsel

In het SI stelsel kiest men $a_1 = 1$. Hier hebben $\vec{E}$ en $\vec{B}$ dus verschillende dimensies! Verder heeft men in het SI stelsel naast een lengte eenheid (meter), een tijdseenheid (seconde) en een massa eenheid (kilogram), de ampère (A) als afgeleide eenheid van stroomsterkte ingevoerd. Eén ampère is de stroom die door elk van twee oneindig lange en oneindig dunne, evenwijdige draden die 1 meter van elkaar verwijderd zijn, moet vloeien om een transversale kracht van 2×10^{-7} newton/meter tussen de draden te veroorzaken. Uit vgl. (27) krijgen we dan direct dat

$$b_2 = a_1 b_2 = 4\pi \times 10^{-7} N\, A^{-2}. \tag{30}$$

De eenheid van lading is de coulomb (C) gedefinieerd als $1\,C = 1\,A\,s$. Men kiest hier eveneens[2],

$$\begin{aligned} \epsilon_0 &= \frac{1}{4\pi} \times 10^7 \times c^{-2} \times A^2\, N^{-1}, \\ \mu_0 &= = 4\pi \times 10^{-7} \times A^{-2}\, N, \end{aligned} \tag{31}$$

zodat de Maxwell vergelijkingen door,

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \tag{32}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \tag{33}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho, \tag{34}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{\jmath} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \tag{35}$$

gegeven worden.

[2]We krijgen dus $\epsilon_0 \mu_0 = c^{-2}$.

3.3 Het Heaviside-Lorentz stelsel

Hier kiest men

$$a_1 = b_2 = c^{-1}, \tag{36}$$

en bijgevolg heeft men,

$$\beta = c. \tag{37}$$

Een onmiddelijk gevolg is dat $\vec{B}$ en $\vec{E}$ dezelfde dimensie hebben! Uiteindelijk maakt men in het vacuum de natuurlijke keuze $\vec{D} = \vec{E}$ en $\vec{H} = \vec{B}$. Of anders gezegd,

$$\epsilon_0 = \mu_0 = 1. \tag{38}$$

De Maxwell vergelijkingen worden dus,

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \tag{39}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \tag{40}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho, \tag{41}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c}\vec{\jmath} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \tag{42}$$

In het Gaussische stelsel worden de factoren 4π in de Coulomb en Ampère wet weg geschaald door $\vec{E}$ en $\vec{B}$ te herschalen,

$$\vec{E}_G = 4\pi\vec{E}_{HL}, \quad \vec{D}_G = 4\pi\vec{D}_{HL}, \quad \vec{B}_G = 4\pi\vec{B}_{HL}, \quad \vec{H}_G = 4\pi\vec{H}_{HL}, \tag{43}$$

met verder geen andere wijzigingen.

4 Slotnoten

Een puntdeeltje met lading q dat met een snelheid $\vec{v}$ in een uitwendig elektromagnetisch veld gekarakteriseerd door een elektrisch veld $\vec{E}$ en een magnetische inductie $\vec{B}$ beweegt, ondervindt een kracht, de Lorentz kracht $\vec{F}_L$. In het Heaviside-Lorentz stelsel wordt ze gegeven door,

$$\vec{F}_L = q(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{v} \times \vec{B}), \tag{44}$$

en in het SI systeem door,

$$\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \tag{45}$$

Ik verwijs andermaal naar [1] voor meer details! Zie ook [2].

Samenvattend: voor *mijn* cursussen zijn de relevante vergelijkingen (39-42) en (44). Verder zal de waarde van de dimensieloze *fijnstructuurconstante* α cruciaal zijn. In zowel het Heaviside-Lorentz als in het Gaussische stelsel wordt dit,

$$\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi\hbar c} \approx \frac{1}{137,036}. \tag{46}$$

Voor de volledigheid, in het SI stelsel hebben we,

$$\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \approx \frac{1}{137,036}. \tag{47}$$

References

[1] *Appendix on Units and Dimensions* in J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3rd edition (1998), Wiley, pagina 775 en volgende.

[2] Een samenvatting kan terug gevonden worden via het URL `http://pdg.web.cern.ch/pdg/2004/reviews/elecrelarpp.pdf`, je kunt eveneens essentiële constantes op `http://pdg.web.cern.ch/pdg/2004/reviews/consrpp.pdf` terugvinden.